

Школьникам, абитуриентам, учащимся

И. Г. Арефьева

Повторяем
математику
за курс средней школы
Решение
смешанных тестов

Минск
«Аверсэв»

Автор
Арефьева Ирина Глебовна

ПРЕДИСЛОВИЕ

Предлагаемый материал содержит подробные решения 35 смешанных тестов, условия которых можно увидеть в пособии «Повторяем математику за курс средней школы. Тестовые задания для 11 класса».

Работа с развернутыми решениями тестовых заданий позволит систематически повторять и обобщать пройденное, так как содержание тестов охватывает ранее изученный материал.

Кроме того, даже в случае полученного правильно ответа на то или иное тестовое задание полезно проанализировать предложенные решения и сравнить их со своими.

Систематическая и ответственная еженедельная работа с пособиями «Повторяем математику за курс средней школы» и «Повторяем математику за курс средней школы. Тестовые задания для 11 класса», а также с предложенными здесь подробными решениями смешанных тестов позволит эффективно подготовиться к ЦТ по математике.

ТЕСТ 1

Часть А

A1. Верной является формула $S = \frac{\pi r^2}{360^\circ} \cdot \alpha$.

Ответ: 3.

A2. $\left(5,25 : 7 - 5 \frac{5}{7} \cdot \frac{3}{8}\right) : 3 - 4 \frac{17}{28}$.

Выполним действия:

$$1) 5,25 : 7 = 5 \frac{1}{4} : 7 = \frac{21}{4} : 7 = \frac{21 \cdot 7}{4 \cdot 7} = \frac{3}{4};$$

$$2) 5 \frac{5}{7} \cdot \frac{3}{8} = \frac{40}{7} \cdot \frac{3}{8} = \frac{40 \cdot 3}{7 \cdot 8} = \frac{5 \cdot 3}{7 \cdot 1} = \frac{15}{7} = 2 \frac{1}{7};$$

$$3) \frac{3}{4} - 2 \frac{1}{7} = -\left(2 \frac{1}{7} - \frac{3}{4}\right) = -\left(2 \frac{4}{28} - \frac{21}{28}\right) = -\left(1 \frac{32}{28} - \frac{21}{28}\right) = -1 \frac{11}{28};$$

$$4) -1 \frac{11}{28} : 3 = -\frac{39}{28} : 3 = -\frac{39 \cdot 3}{28 \cdot 3} = -\frac{13}{28};$$

$$5) -\frac{13}{28} - 4 \frac{17}{28} = -4 \frac{30}{28} = -5 \frac{2}{28} = -5 \frac{1}{14}.$$

Ответ: 4.

A3. Запишем функцию в виде $y = (x+3)^2$. Графиком данной функции является парабола, ветви которой направлены вверх. Вершиной параболы является точка $(-3; 0)$. Таким образом, график функции $y = x^2 + 6x + 9$ изображен на пятом рисунке.

Ответ: 5.

A4. 1) Проведем $CH \perp AD$. Тогда $ABCH$ — прямоугольник, т. е. $AH = BC$, значит, $HD = AD - AH = AD - BC = 4$.

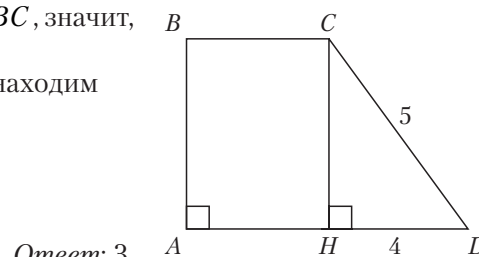
2) Из прямоугольного треугольника CHD по теореме Пифагора находим

$$CH^2 = CD^2 - HD^2;$$

$$CH^2 = 5^2 - 4^2 = 25 - 16 = 9;$$

$$CH = 3.$$

Так как $AB = CH$, то $AB = 3$.



Ответ: 3.

A5. 1) Известно, что $a_3 = 8$ и $a_4 = 5$, тогда $d = a_4 - a_3 = 5 - 8 = -3$.

2) Воспользуемся формулой n -го члена арифметической прогрессии $a_n = a_1 + d(n-1)$ и найдем первый член данной прогрессии: $a_3 = a_1 + 2d$; $8 = a_1 + 2 \cdot (-3)$; $8 = a_1 - 6$; $a_1 = 14$.

3) Воспользуемся формулой $S_n = \frac{2a_1 + (n-1)d}{2} \cdot n$. Так как $S_n = 28$; $a_1 = 14$; $d = -3$, составим уравнение:

$$28 = \frac{2 \cdot 14 + (n-1) \cdot (-3)}{2} \cdot n; \quad 28 = \frac{28 - 3n + 3}{2} \cdot n; \quad 28 = \frac{31 - 3n}{2} \cdot n; \quad 56 = (31 - 3n) \cdot n; \quad 3n^2 - 31n + 56 = 0;$$

$$D = 31^2 - 4 \cdot 3 \cdot 56 = 961 - 672 = 289 = 17^2. \quad n_{1,2} = \frac{31 \pm 17}{2 \cdot 3}; \quad n_1 = 8; \quad n_2 = \frac{7}{3}.$$

Так как n — натуральное число, то $n = 8$.

Ответ: 1.

A6. $\operatorname{tg}\left(4 \arccos\left(-\frac{1}{2}\right)\right) = \operatorname{tg}\left(4 \cdot \left(\pi - \arccos\frac{1}{2}\right)\right) = \operatorname{tg}\left(4 \cdot \left(\pi - \frac{\pi}{3}\right)\right) = \operatorname{tg}\frac{8\pi}{3} = \operatorname{tg}\left(3\pi - \frac{\pi}{3}\right) = \operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\operatorname{tg}\frac{\pi}{3} = -\sqrt{3}.$

Ответ: 4.

A7. $(x^2 + 2x)^2 - 4(x+1)^2 + 7 = 0.$

Запишем данное уравнение в виде $(x^2 + 2x)^2 - 4(x^2 + 2x + 1) + 7 = 0$ и выполним замену переменной. Пусть $t = x^2 + 2x$, тогда уравнение принимает вид $t^2 - 4(t+1) + 7 = 0$; $t^2 - 4t - 4 + 7 = 0$; $t^2 - 4t + 3 = 0$. Воспользуемся теоремой Виета и найдем $\begin{cases} t=1, \\ t=3. \end{cases}$ Тогда $\begin{cases} x^2 + 2x = 1, \\ x^2 + 2x = 3; \end{cases} \begin{cases} x^2 + 2x - 1 = 0, \\ x^2 + 2x - 3 = 0. \end{cases}$

Так как и первое и второе уравнения совокупности имеют корни ($D > 0$), то (по теореме Виета) произведение корней первого уравнения равно -1 , а второго -3 . Таким образом, произведение корней исходного уравнения равно $-1 \cdot (-3) = 3$.

Ответ: 3.

A8. Пусть $MC = a$. Тогда, из прямоугольных треугольников MBC и MCD ,

$$BC = a, \quad CD = MC \cdot \operatorname{ctg} 60^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

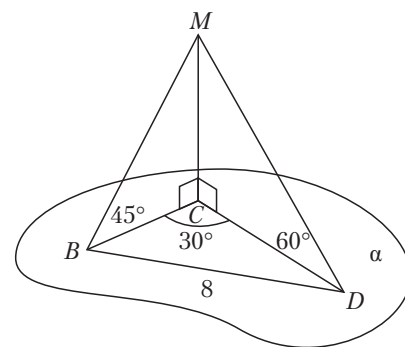
В треугольнике BCD применим теорему косинусов:

$$BD^2 = BC^2 + CD^2 - 2 \cdot BC \cdot DC \cdot \cos \angle BCD,$$

т. е. $64 = a^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2 - 2 \cdot a \cdot \frac{a\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$; $a = 8\sqrt{3}$. Тогда $BC = 8\sqrt{3}$, $CD = 8$.

Так как меньшей проекции соответствует меньшая наклонная, то $MD < BM$.

Из прямоугольного треугольника MCD найдем $MD = 16$.



Ответ: 1.

A9. $\sin^2 \frac{\pi}{x} + 3 \cos \frac{\pi}{x} \sin \frac{\pi}{x} - 2 = 0$; $\sin^2 \frac{\pi}{x} + 3 \cos \frac{\pi}{x} \sin \frac{\pi}{x} - 2 \left(\sin^2 \frac{\pi}{x} + \cos^2 \frac{\pi}{x} \right) = 0$; $\sin^2 \frac{\pi}{x} - 3 \cos \frac{\pi}{x} \sin \frac{\pi}{x} + 2 \cos^2 \frac{\pi}{x} = 0$.

Разделим обе части уравнения на $\cos^2 \frac{\pi}{x}$ и получим $\operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{x} - 3 \operatorname{tg} \frac{\pi}{x} + 2 = 0$.

Пусть $\operatorname{tg} \frac{\pi}{x} = t$, тогда уравнение принимает вид $t^2 - 3t + 2 = 0$; $\begin{cases} t=1, \\ t=2. \end{cases}$

То есть $\begin{cases} \operatorname{tg} \frac{\pi}{x} = 1, \\ \operatorname{tg} \frac{\pi}{x} = 2; \end{cases} \begin{cases} \frac{\pi}{x} = \frac{\pi}{4} + \pi n, \\ \frac{\pi}{x} = \arctg 2 + \pi n, \end{cases} n \in \mathbf{Z}; \begin{cases} \frac{1}{x} = \frac{1}{4} + n, \\ \frac{1}{x} = \frac{\arctg 2}{\pi} + n, \end{cases} n \in \mathbf{Z}; \begin{cases} \frac{1}{x} = \frac{1+4n}{4}, \\ \frac{1}{x} = \frac{\arctg 2 + \pi n}{\pi}, \end{cases} n \in \mathbf{Z}; \begin{cases} x = \frac{4}{1+4n}, \\ x = \frac{\pi}{\arctg 2 + \pi n}, \end{cases} n \in \mathbf{Z}.$

Ответ: 2.

Часть В

B1. 1) Так как $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ — прямой параллелепипед, то $ABCD$ — параллелограмм, а четырехугольник $B_1 B D D_1$ является прямоугольником.

2) В треугольнике ABD воспользуемся теоремой косинусов: $BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2 \cdot AB \cdot AD \cdot \cos \angle BAD$;

$$BD^2 = 6^2 + 10^2 - 2 \cdot 6 \cdot 10 \cdot \frac{1}{2}; \quad BD^2 = 36 + 100 - 60 = 76 \text{ и } BD = \sqrt{76}.$$

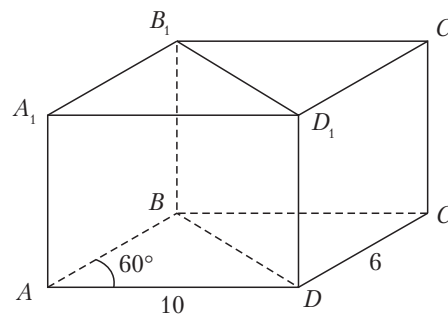
3) В параллелограмме $ABCD$ воспользуемся формулой, связывающей длины сторон и длины диагоналей параллелограмма: $(d_1^2 + d_2^2 = 2(a^2 + b^2))$. Тогда $BD^2 + AC^2 = 2(AB^2 + AD^2)$;

$$76 + AC^2 = 2(36 + 100); \quad AC^2 = 272 - 76 = 196; \quad AC = 14. \text{ Так как известно, что } AC = B_1 B, \text{ то } B_1 B = 14.$$

4) Найдем площадь прямоугольника $B_1 B D D_1$: $S_{B_1 B D D_1} = BD \cdot BB_1 = \sqrt{76} \cdot 14$.

$$\text{Значение искомого выражения равно: } \frac{S}{\sqrt{19}} = \frac{S_{B_1 B D D_1}}{\sqrt{19}} = \frac{\sqrt{76} \cdot 14}{\sqrt{19}} = \frac{\sqrt{4 \cdot 19} \cdot 14}{\sqrt{19}} = \frac{2 \sqrt{19} \cdot 14}{\sqrt{19}} = 28.$$

Ответ: 28.



B2. Пусть x — первоначальное количество тетрадей в пачке, тогда $\frac{x}{2}$ работ имеет отметку «восемь». Если убрать из пачки три работы, то останется $(x-3)$ тетрадей, причем отметка «восемь» будет стоять в $0,48 \cdot (x-3)$ работах. Так как процентное содержание работ с отметкой «восемь» уменьшилось после того, как убрали три тетради, то среди этих трех тетрадей хотя бы в одной стоит «восьмерка». Рассмотрим возможные случаи.

1) Пусть отметка «восемь» стоит только в одной из убранных тетрадей, тогда в пачке осталось $\left(\frac{x}{2}-1\right)$ работ с «восьмеркой». С другой стороны, отметка «восемь» стоит в $0,48 \cdot (x-3)$ работах. Составим уравнение: $\frac{x}{2}-1=0,48 \cdot (x-3)$; $x-2=0,96 \cdot (x-3)$; $x-2=0,96x-2,88$; $0,04x=-0,88$, т. е. $x < 0$, что не удовлетворяет условию задачи.

2) Пусть отметка «восемь» стоит только в двух из убранных тетрадей, тогда в пачке осталось $\left(\frac{x}{2}-2\right)$ работ с «восьмеркой». Составим уравнение $\frac{x}{2}-2=0,48 \cdot (x-3)$; $x-4=0,96 \cdot (x-3)$; $x-4=0,96x-2,88$; $0,04x=1,22$; $x=28$.

3) Пусть отметка «восемь» стоит во всех трех убранных тетрадях, тогда в пачке осталось $\left(\frac{x}{2}-3\right)$ работ с «восьмеркой». Составим уравнение: $\frac{x}{2}-3=0,48 \cdot (x-3)$; $x-6=0,96 \cdot (x-3)$; $0,04x=3,12$; $x=78$. Но по условию задачи $x < 75$.

Таким образом, в пачке первоначально находилось 28 тетрадей.

Ответ: 28.

$$\begin{aligned} \text{B3. } A &= (4+1)(4^2+1)(4^4+1)(4^8+1) - \frac{1}{3} \cdot 4^{16} = \frac{(4-1)(4+1)(4^2+1)(4^4+1)(4^8+1)}{4-1} - \frac{1}{3} \cdot 4^{16} = \\ &= \frac{(4^2-1)(4^2+1)(4^4+1)(4^8+1)}{3} - \frac{1}{3} \cdot 4^{16} = \frac{(4^4-1)(4^4+1)(4^8+1)}{3} - \frac{1}{3} \cdot 4^{16} = \frac{(4^8-1)(4^8+1)}{3} - \frac{1}{3} \cdot 4^{16} = \\ &= \frac{4^{16}-1}{3} - \frac{1}{3} \cdot 4^{16} = -\frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Тогда значение искомого выражения равно -2 .

Ответ: -2 .

$$\text{B4. } \begin{cases} \frac{36}{x} - x \leq 0, \\ \frac{|12-2x|(x^2+3x+8)}{|x|-3} \leq 0. \end{cases} \quad \text{Заметим, что } x^2+3x+8 > 0 \text{ для всех } x \in \mathbf{R} \text{ (так как } a=1 > 0 \text{ и } D < 0\text{)}. \text{ Тогда ис-}$$

$$\text{ходную систему можно записать в виде: } \begin{cases} \frac{36-x^2}{x} \leq 0, \\ \frac{|12-2x|}{|x|-3} \leq 0. \end{cases} \quad \text{Воспользуемся методом интервалов для решения}$$

каждого неравенства системы:

$$\begin{cases} \begin{array}{c} + \quad - \quad + \quad - \\ \bullet \quad \circ \quad \bullet \\ -6 \quad 0 \quad 6 \end{array} \\ \begin{array}{c} + \quad - \quad + \quad + \\ \bullet \quad \circ \quad \bullet \\ -3 \quad 3 \quad 6 \end{array} \end{cases} \quad \begin{cases} x \in [-6; 0) \cup [6; +\infty), \\ x \in (-3; 3) \cup \{6\}; \end{cases} \quad x \in (-3; 0) \cup \{6\}.$$

Найдем сумму целых решений системы неравенств: $-2 + (-1) + 6 = 3$.

Ответ: 3.

B5. Условию задачи удовлетворяют все натуральные значения переменной x , являющиеся решениями неравенства $8 < \frac{x}{3} < 12$ и не кратные трем (так как дробь $\frac{x}{3}$ должна быть несократимой). Решим в натуральных

числах полученное неравенство: $24 < x < 36$. То есть $x = 25; 26; 27; \dots 34; 35$. Из полученного множества значений переменной x исключим числа, кратные трем, и найдем искомую сумму:

$$\frac{25}{3} + \frac{26}{3} + \frac{28}{3} + \frac{29}{3} + \frac{31}{3} + \frac{32}{3} + \frac{34}{3} + \frac{35}{3} = \frac{240}{3} = 80.$$

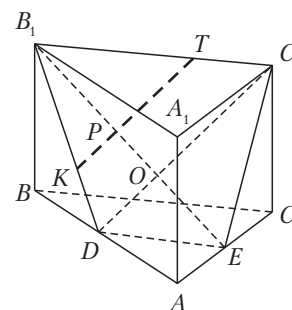
Ответ: 80.

В6. Так как отрезок DE является средней линией треугольника ABC , то $DE = \frac{1}{2}BC$ и $DE \parallel BC$, поскольку $B_1C_1 \parallel BC$, то $DE \parallel B_1C_1$. Трапеция DEC_1B_1 является сечением призмы плоскостью, проходящей через параллельные прямые DE и B_1C_1 . Отрезки C_1D и B_1E лежат в плоскости сечения и являются диагоналями трапеции DEC_1B_1 .

Так как $DE = \frac{1}{2}B_1C_1$ и треугольники B_1C_1O и EDO подобны, то $OE = \frac{1}{2}B_1O$, т. е. $OE = x$, $B_1O = 2x$. Тогда $B_1E = 3x$.

Так как P — середина отрезка B_1E , то $B_1P = \frac{1}{2}B_1E = \frac{3x}{2}$.

Из подобия треугольников B_1KT и B_1DC_1 получим, что $\frac{B_1P}{B_1O} = \frac{KT}{C_1D}$; $\frac{\frac{3x}{2}}{2x} = \frac{KT}{12}$;
 $KT = 9$.



Ответ: 9.

ТЕСТ 2

Часть А

A1. Равенство 1) $\sin A = \frac{CB}{AC}$ — неверно, так как $\sin A = \frac{CB}{AB}$.

Равенство 2) $CB^2 = AB^2 + AC^2$ — неверно, так как $AB^2 = CB^2 + AC^2$ (теорема Пифагора).

Равенство 4) $S_{ABC} = CH \cdot AB$ — неверно, так как $S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot CH \cdot AB$.

Равенство 5) $\angle A + \angle B = 180^\circ$ — неверно, так как $\angle A + \angle B = 90^\circ$.

Верным является равенство 3) $CH^2 = HB \cdot AH$.

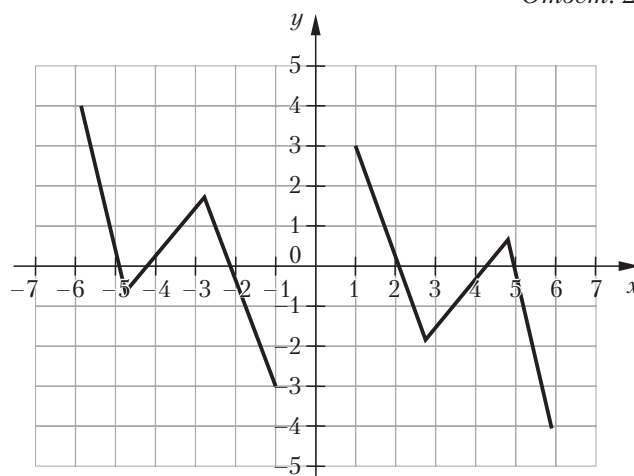
Ответ: 3.

A2. $4^{5x} \cdot 4^{4x} = 4^{5x+4x} = 4^{9x}$. При $x = \frac{1}{6}$ получим: $4^{9x} = 4^{9 \cdot \frac{1}{6}} = 4^{\frac{3}{2}} = 4^{\frac{3}{2}} = (2^2)^{\frac{3}{2}} = 2^{2 \cdot \frac{3}{2}} = 2^3 = 8$.

Ответ: 2.

A3. График нечетной функции симметричен относительно начала координат, т. е. противоположным значениям аргумента должны соответствовать противоположные значения функции. На рисунке изображен график данной функции для $x \leq -1$ и $x \geq 1$.

Ответ: 4.



A4. Избавимся от иррациональности в знаменателях дробей:

$$\frac{2}{\sqrt{19} + \sqrt{17}} = \frac{2(\sqrt{19} - \sqrt{17})}{(\sqrt{19} + \sqrt{17})(\sqrt{19} - \sqrt{17})} = \frac{2(\sqrt{19} - \sqrt{17})}{(\sqrt{19})^2 - (\sqrt{17})^2} = \frac{2(\sqrt{19} - \sqrt{17})}{19 - 17} = \frac{2(\sqrt{19} - \sqrt{17})}{2} = \sqrt{19} - \sqrt{17};$$

$$\frac{2}{\sqrt{17} + \sqrt{15}} = \frac{2(\sqrt{17} - \sqrt{15})}{(\sqrt{17} + \sqrt{15})(\sqrt{17} - \sqrt{15})} = \frac{2(\sqrt{17} - \sqrt{15})}{(\sqrt{17})^2 - (\sqrt{15})^2} = \frac{2(\sqrt{17} - \sqrt{15})}{17 - 15} = \frac{2(\sqrt{17} - \sqrt{15})}{2} = \sqrt{17} - \sqrt{15}.$$

$$\text{Тогда } \left(\frac{2}{\sqrt{19} + \sqrt{17}} + \frac{2}{\sqrt{17} + \sqrt{15}} + \sqrt{15} \right) \cdot \sqrt{19} = (\sqrt{19} - \sqrt{17} + \sqrt{17} - \sqrt{15} + \sqrt{15}) \cdot \sqrt{19} = \sqrt{19} \cdot \sqrt{19} = 19.$$

Ответ: 4.

$$\begin{aligned} \text{A5. } \sin^2 6,4\pi + \sin^2 2,9\pi - 4 \operatorname{tg} 1,4\pi \cdot \operatorname{tg} 7,1\pi &= \sin^2 (6\pi + 0,4\pi) + \sin^2 (2\pi + 0,9\pi) - 4 \operatorname{tg} (\pi + 0,4\pi) \cdot \operatorname{tg} (7\pi + 0,1\pi) = \\ &= \sin^2 0,4\pi + \sin^2 0,9\pi - 4 \operatorname{tg} 0,4\pi \cdot \operatorname{tg} 0,1\pi = \sin^2 0,4\pi + \sin^2 (0,5\pi + 0,4\pi) - 4 \operatorname{tg} (0,5\pi - 0,1\pi) \cdot \operatorname{tg} 0,1\pi = \\ &= \sin^2 0,4\pi + \cos^2 0,4\pi - 4 \operatorname{ctg} 0,1\pi \cdot \operatorname{tg} 0,1\pi = 1 - 4 \cdot 1 = -3. \end{aligned}$$

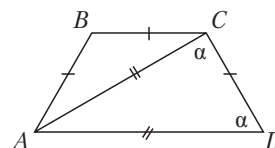
Ответ: 1.

A6. Так как треугольник ACD — равнобедренный, то $\angle ACD = \angle ADC = \alpha$, тогда $\angle CAD = 180^\circ - 2\alpha$. Поскольку у равнобедренной трапеции углы при основании равны, то $\angle BAD = \angle ADC = \alpha$, тогда $\angle BAC = \angle BAD - \angle CAD = \alpha - (180^\circ - 2\alpha) = 3\alpha - 180^\circ$.

В равнобедренном треугольнике ABC $\angle BCA = \angle BAC = 3\alpha - 180^\circ$.

Так как $\angle BCD + \angle ADC = 180^\circ$; $3\alpha - 180^\circ + \alpha + \alpha = 180^\circ$; $5\alpha = 360^\circ$; $\alpha = 72^\circ$.

Тогда больший угол трапеции равен $180^\circ - 72^\circ = 108^\circ$.



Ответ: 5.

A7. Рассмотрим пропорцию $a:b=c:d$ ($a; d$ — крайние члены пропорции, $b; c$ — ее средние члены), тогда $a+d=17$; $b+c=13$ и $a^2+b^2+c^2+d^2=290$. По свойству пропорции $ad=bc$. Составим систему:

$$\begin{cases} a+d=17, \\ b+c=13, \\ a^2+b^2+c^2+d^2=290, \\ ad=bc; \end{cases} \quad \begin{cases} (a+d)^2=289, \\ (b+c)^2=169, \\ a^2+b^2+c^2+d^2=290, \\ ad=bc; \end{cases} \quad \begin{cases} a^2+2ad+d^2=289, \\ b^2+2bc+c^2=169, \\ a^2+b^2+c^2+d^2=290, \\ ad=bc. \end{cases}$$

Сложим первое и второе уравнения системы и получим $a^2+2ad+d^2+b^2+2bc+c^2=289+169$ или $(a^2+b^2+c^2+d^2)+2bc+2ad=458$.

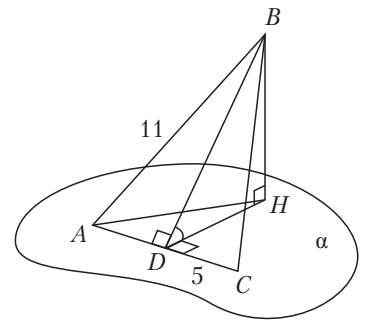
Так как $a^2+b^2+c^2+d^2=290$, то $2bc+2ad=458-290$; $2bc+2ad=168$; $bc+ad=84$. Поскольку $ad=bc$, то $2bc=84$; $bc=42$.

Ответ: 5.

A8. Из прямоугольного треугольника ABD по теореме Пифагора получим $BD=\sqrt{AB^2-AD^2}=\sqrt{121-25}=4\sqrt{6}$. В прямоугольном треугольнике BDH $\angle BDH=60^\circ$ и $BD=4\sqrt{6}$, тогда $BH=BD \cdot \sin 60^\circ=4\sqrt{6} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}=6\sqrt{2}$. По теореме Пифагора из прямоугольного треугольника ABH получим, что

$$AH=\sqrt{AB^2-BH^2}=\sqrt{121-72}=\sqrt{49}=7.$$

Ответ: 2.



A9. Данное неравенство равносильно системе $\begin{cases} |2x+3|-3x \leq 2, \\ |2x+3|-3x \geq -2. \end{cases}$

Тогда $\begin{cases} |2x+3| \leq 3x+2, \\ |2x+3| \geq 3x-2; \end{cases} \quad \begin{cases} 2x+3 \leq 3x+2, \\ 2x+3 \geq -3x-2; \end{cases} \quad \begin{cases} -x \leq -1, \\ 5x \geq -5; \end{cases} \quad \begin{cases} x \geq 1, \\ x \geq -1; \end{cases} \quad \begin{cases} x \leq 5, \\ x \leq -\frac{1}{5}. \end{cases}$

$x \in [1; 5]$.

Неравенство имеет пять натуральных решений (это числа 1; 2; 3; 4 и 5).

Ответ: 3.

Часть В

B1. Разделим первое уравнение системы на второе и получим $\begin{cases} \frac{x}{y}=3, \\ y(3y+x)=6. \end{cases}$

Тогда $\begin{cases} x=3y, \\ y(3y+x)=6; \end{cases} \quad \begin{cases} x=3y, \\ y(3y+3y)=6; \end{cases} \quad \begin{cases} x=3y, \\ y \cdot 6y=6; \end{cases} \quad \begin{cases} x=3y, \\ 6y^2=6; \end{cases} \quad \begin{cases} x=3y, \\ y^2=1; \end{cases} \quad \begin{cases} x=3y, \\ y=\pm 1; \end{cases} \quad \begin{cases} x=3y, \\ \begin{cases} y=1; \\ y=-1; \end{cases} \end{cases} \quad \begin{cases} x=3, \\ y=1; \end{cases} \quad \begin{cases} x=-3, \\ y=-1. \end{cases}$

Таким образом, система имеет два решения (т. е. $n=2$) и $n \cdot (x^2+y^2)=2 \cdot ((\pm 3)^2+(\pm 1)^2)=2 \cdot (9+1)=20$.

Ответ: 20.

B2. Так как x, y, z — седьмой, десятый и девятнадцатый члены геометрической прогрессии соответственно, то $y=x \cdot q^3$, $z=x \cdot q^{12}$, где q — знаменатель данной прогрессии.

Тогда $x^{-6} \cdot y^8 \cdot z^{-2}=x^{-6} \cdot (x \cdot q^3)^8 \cdot (x \cdot q^{12})^{-2}=x^{-6} \cdot x^8 \cdot q^{24} \cdot x^{-2} \cdot q^{-24}=x^{-6+8-2} \cdot q^{24-24}=x^0 \cdot q^0=1$.

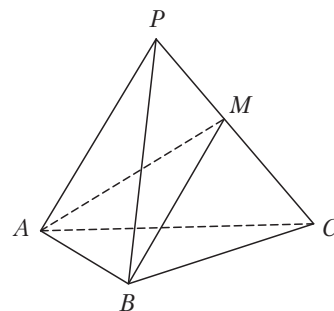
Ответ: 1.

В3. Так как $PABC$ — правильный тетраэдр, то все его грани являются равносторонними треугольниками. Отрезки AM и BM — медианы (и высоты) равносторонних треугольников APC и BPC . Воспользуемся формулой $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ и получим

$$AM = BM = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

$$\text{Тогда } P_{ABM} = a + 2 \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = a + a\sqrt{3} = a(1 + \sqrt{3}).$$

$$\text{Так как } a = \sqrt{3} - 1, \text{ то } P_{ABM} = (\sqrt{3} - 1)(1 + \sqrt{3}) = (\sqrt{3})^2 - 1^2 = 3 - 1 = 2.$$



Ответ: 2.

В4. $\frac{1}{\cos x} + \frac{\sqrt{3}}{\sin x} = 4; \quad \frac{\sin x + \sqrt{3} \cos x}{\cos x \sin x} = 4; \quad \begin{cases} \sin x + \sqrt{3} \cos x = 4 \cos x \sin x, \\ \cos x \sin x \neq 0. \end{cases}$

Решим первое уравнение системы:

$$\sin x + \sqrt{3} \cos x = 4 \cos x \sin x; \quad \frac{1}{2} \sin x + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos x = 2 \cos x \sin x; \quad \cos 60^\circ \sin x + \sin 60^\circ \cos x = 2 \cos x \sin x;$$

$$\sin(x + 60^\circ) - \sin 2x = 0; \quad 2 \sin \frac{x + 60^\circ - 2x}{2} \cos \frac{x + 60^\circ + 2x}{2} = 0; \quad \sin\left(30^\circ - \frac{x}{2}\right) \cos\left(30^\circ + \frac{3x}{2}\right) = 0;$$

$$\begin{cases} \sin\left(\frac{x}{2} - 30^\circ\right) = 0, \\ \cos\left(30^\circ + \frac{3x}{2}\right) = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{x}{2} - 30^\circ = 180^\circ n, \\ \frac{3x}{2} + 30^\circ = 90^\circ + 180^\circ n, \end{cases} \quad \begin{cases} x = 60^\circ + 360^\circ n, \\ x = 40^\circ + 120^\circ n, \end{cases} \quad n \in \mathbf{Z}.$$

Полученные серии корней удовлетворяют условию $\cos x \sin x \neq 0$.

Наименьший положительный корень данного уравнения равен 40° .

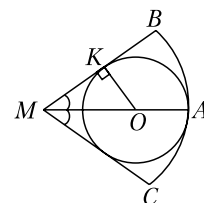
Ответ: 40.

В5. 1) Пусть $R = AM$ — радиус сектора и $r = AO$ — радиус вписанной в сектор окружности.

Так как $R = 3r$, то $OM = AM - OA = R - r = 3r - r = 2r$.

2) Рассмотрим прямоугольный треугольник $МОК$. Так как $OM = 2r$ и $OK = r$, $\angle OMK = 30^\circ$. Значит, $\angle CMK = 2 \cdot \angle OMK = 2 \cdot 30^\circ = 60^\circ$.

Ответ: 60.



В6. Преобразуем левую часть уравнения:

$$x^4 - 4x^2 + x^2 - 6x + 9 = 0; \quad x^4 - 4x^2 + 4 + x^2 - 6x + 9 = 4;$$

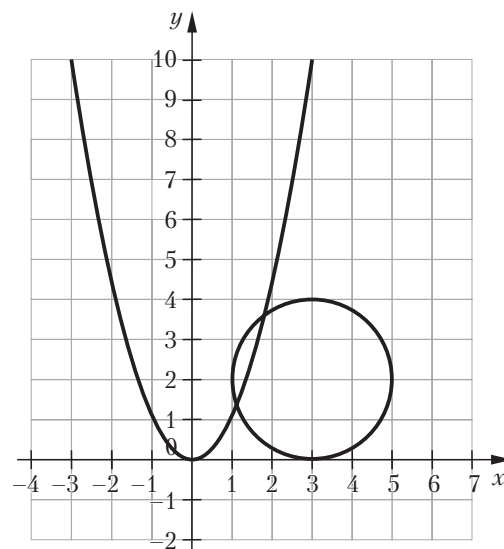
$$(x^2 - 2)^2 + (x - 3)^2 = 4.$$

Пусть $x^2 = y$, тогда исходное уравнение принимает вид $(y - 2)^2 + (x - 3)^2 = 4$ и является уравнением окружности с центром в точке $(3; 2)$ и радиусом 2.

$$\text{Составим систему уравнений } \begin{cases} y = x^2; \\ (y - 2)^2 + (x - 3)^2 = 4. \end{cases}$$

Построим графики первого и второго уравнений системы. Так как парабола $y = x^2$ и окружность $(x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 4$ имеют две общие точки, то уравнение имеет два корня.

Ответ: 2.



ТЕСТ 3

Часть А

A1. Одночлен — это произведение чисел, переменных и натуральных степеней переменных. Одночленом является выражение под номером 5.

Ответ: 5.

A2. Два числа называются обратными, если их произведение равно единице. Так как $1\frac{2}{3} \cdot 0,6 = \frac{5}{3} \cdot \frac{3}{5} = 1$, то число 0,6 является обратным числу $1\frac{2}{3}$.

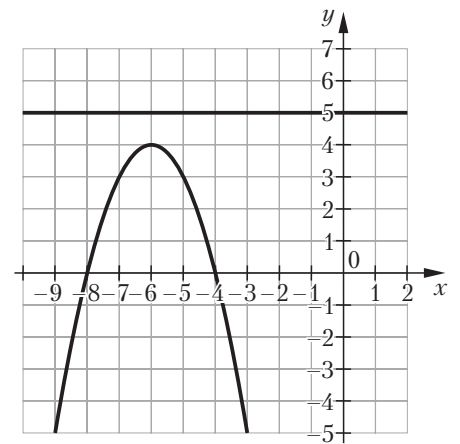
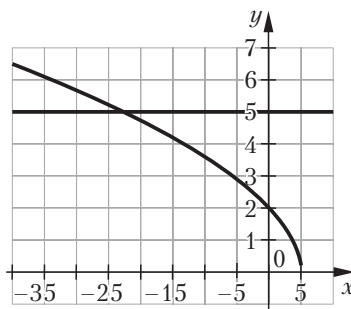
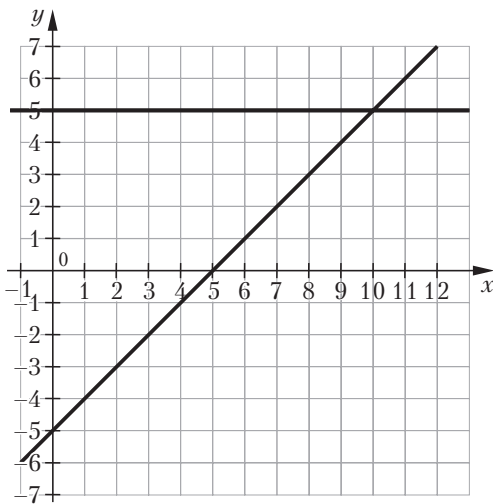
Ответ: 2.

A3. Схематично изобразим графики предложенных функций:

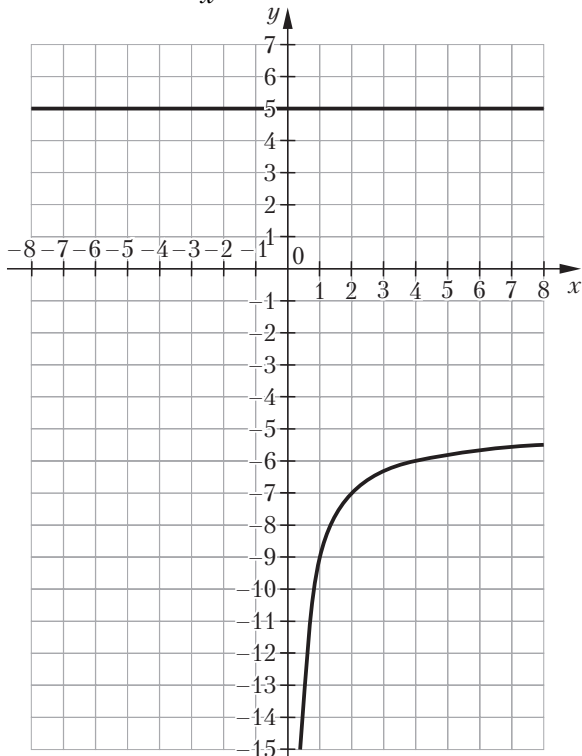
1) $y = 5$ и $y = x - 5$;

2) $y = 5$ и $y = \sqrt{5 - x}$;

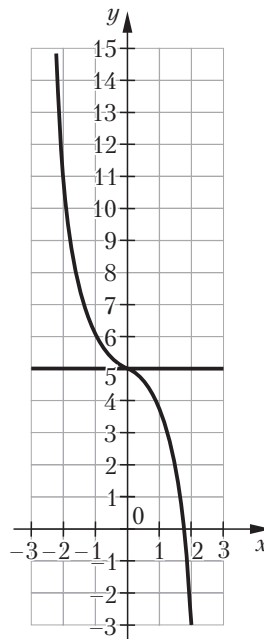
3) $y = 5$ и $y = -(x + 6)^2 + 4$;



4) $y = 5$ и $y = -\frac{4}{x} - 5$;



5) $y = 5$ и $y = -x^3 + 5$.



Очевидно, что ниже прямой $y = 5$ расположен график функции $y = -(x+6)^2 + 4$.

Ответ: 3.

A4. Так как после продажи трети конфет масса ящика с конфетами уменьшилась на 32 %, то она стала равна $45 \cdot 0,68 = 30,6$ кг.

Значит, масса трети конфет равна $45 - 30,6 = 14,4$ кг, а масса всех конфет равна $14,4 \cdot 3 = 43,2$ кг.

Тогда пустой ящик весит $45 - 43,2 = 1,8$ кг.

Ответ: 3.

A5. Пусть каждое ребро призмы равно a .

Тогда $AA_1 = \frac{a}{2}$ (как средняя линия треугольника $B_1C_1D_1$).

Применяя теорему Пифагора в прямоугольных треугольниках AD_1D и A_1CC_1 , получим:

$$AD = A_1C = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + a^2} = \sqrt{\frac{a^2}{4} + a^2} = \sqrt{\frac{5a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{5}}{2}.$$

$$\text{Тогда } P_{DA_1C} = DC + AD + AA_1 + A_1C = a + \frac{a\sqrt{5}}{2} + \frac{a}{2} + \frac{a\sqrt{5}}{2} = \frac{3a + 2a\sqrt{5}}{2} = \frac{a(3 + 2\sqrt{5})}{2}.$$

$$\text{Так как } a = 2\sqrt{5} - 3, \text{ то } P_{DA_1C} = \frac{a(3 + 2\sqrt{5})}{2} = \frac{(2\sqrt{5} - 3)(2\sqrt{5} + 3)}{2} = \frac{20 - 9}{2} = 5,5.$$

Ответ: 2.

$$\text{A6. } \sqrt[6]{5^7} \cdot \sqrt[7]{5^5} \cdot \sqrt[7]{5^{-2}} = \sqrt[6]{\sqrt[7]{5^{49}} \cdot 5^5} \cdot \sqrt[7]{5^{-2}} = \sqrt[6]{\sqrt[7]{5^{54}}} \cdot \sqrt[7]{5^{-2}} = \sqrt[42]{5^{54}} \cdot \sqrt[7]{5^{-2}} = \sqrt[7]{5^9} \cdot \sqrt[7]{5^{-2}} = \sqrt[7]{5^9 \cdot 5^{-2}} = \sqrt[7]{5^7} = 5.$$

Ответ: 5.

A7. Так как уравнение $2x^2 - 6x - 1 = 0$ имеет корни ($D > 0$), найдем сумму и произведение корней этого уравнения с помощью теоремы Виета: $x_1 + x_2 = \frac{6}{2} = 3$; $x_1 \cdot x_2 = -\frac{1}{2}$.

Преобразуем выражение:

$$\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} = \frac{x_1^2 + x_2^2}{x_1 x_2} = \frac{(x_1^2 + x_2^2 + 2x_1 x_2) - 2x_1 x_2}{x_1 x_2} = \frac{(x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2}{x_1 x_2} = \frac{3^2 - 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)}{-\frac{1}{2}} = \frac{9 + 1}{-\frac{1}{2}} = -20.$$

Ответ: 5.

A8. Пусть боковая сторона треугольника ABC равна a . По свойству равнобедренного треугольника $\angle BCA = \angle BAC = 30^\circ$ и $AM = MC$.

Из прямоугольного треугольника BMC получим, что

$$BM = \frac{a}{2} \text{ и } MC = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

Тогда $AC = 2MC = a\sqrt{3}$ и периметр треугольника ABC равен $2a + a\sqrt{3}$.

То есть $2a + a\sqrt{3} = 20 + 10\sqrt{3}$; $a(2 + \sqrt{3}) = 10(2 + \sqrt{3})$; $a = 10$, тогда $BM = 5$.

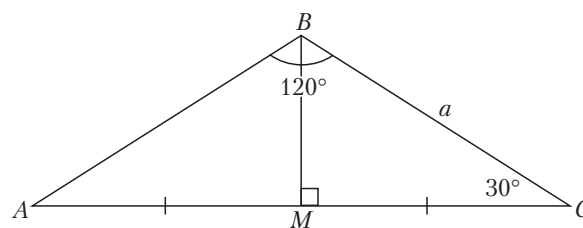
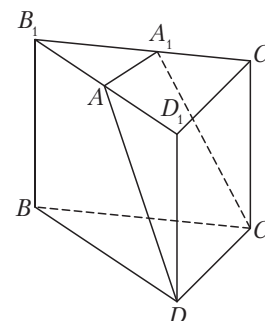
Ответ: 5.

$$\text{A9. } A = \sqrt{x^2 - 8\sqrt{5}x + 80} + \sqrt{x^2 + 18x + 81} = \sqrt{(x - 4\sqrt{5})^2} + \sqrt{(x + 9)^2} = |x - 4\sqrt{5}| + |x + 9|.$$

При $x = \frac{9 - 4\sqrt{5}}{2}$ получим

$$A = \left| \frac{9 - 4\sqrt{5}}{2} - 4\sqrt{5} \right| + \left| \frac{9 - 4\sqrt{5}}{2} + 9 \right| = \left| \frac{9 - 12\sqrt{5}}{2} \right| + \left| \frac{27 - 4\sqrt{5}}{2} \right| = \frac{12\sqrt{5} - 9}{2} + \frac{27 - 4\sqrt{5}}{2} = \frac{8\sqrt{5} + 18}{2} = 4\sqrt{5} + 9.$$

Ответ: 1.



В1. Пусть x — исходное двузначное число. Приписывание к нему справа единицы означает, что исходное число увеличили в 10 раз и к полученному результату прибавили 1, т. е. получили число $10x + 1$. После того как к числу $10x + 1$ приписали слева единицу, оно увеличилось на 1000 и стало равным $(10x + 1) + 1000 = 1001 + 10x$. По условию задачи известно, что полученное число больше исходного в 23 раза.

Составим уравнение: $1001 + 10x = 23x$; $1001 = 13x$; $x = 77$.

Ответ: 77.

В2. Найдем значение выражения:

$$\sin \frac{\pi}{12} = \sin 15^\circ = \sin (45^\circ - 30^\circ) = \sin 45^\circ \cos 30^\circ - \sin 30^\circ \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}.$$

Тогда значение искомого выражения равно:

$$\begin{aligned} & 16\sqrt{2+\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} = 4\sqrt{2+\sqrt{3}} \cdot (\sqrt{6}-\sqrt{2}) = \\ & = 4\sqrt{2+\sqrt{3}} \cdot \sqrt{(\sqrt{6}-\sqrt{2})^2} = 4\sqrt{2+\sqrt{3}} \cdot \sqrt{6-2\sqrt{12}+2} = 4\sqrt{2+\sqrt{3}} \cdot \sqrt{8-4\sqrt{3}} = \\ & = 4\sqrt{2+\sqrt{3}} \cdot \sqrt{4 \cdot (2-\sqrt{3})} = 8 \cdot \sqrt{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})} = 8 \cdot 1 = 8. \end{aligned}$$

Ответ: 8.

$$\text{B3. } \begin{cases} \frac{2x-14}{x^2-x-12} \leq 1, \\ |4-2x| \leq 1; \end{cases} \begin{cases} \frac{2x-14}{x^2-x-12} - 1 \leq 0, \\ |2x-4| \leq 1; \end{cases} \begin{cases} \frac{2x-14-x^2+x+12}{x^2-x-12} \leq 0, \\ -1 \leq 2x-4 \leq 1; \end{cases} \begin{cases} \frac{-x^2+3x-2}{x^2-x-12} \leq 0, \\ 3 \leq 2x \leq 5; \end{cases} \begin{cases} \frac{x^2-3x+2}{x^2-x-12} \geq 0, \\ 1,5 \leq x \leq 2,5; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{(x-1)(x-2)}{(x-4)(x+3)} \geq 0, \\ 1,5 \leq x \leq 2,5, \end{cases} \begin{cases} \text{Number line diagram with points } -3, 1, 2, 4 \text{ and intervals } (-3, 1), (1, 2), (2, 4), (4, \infty) \text{ marked with signs } -, +, -, +. \\ \text{Number line diagram with points } 1,5, 2,5 \text{ and intervals } [1,5, 2,5] \text{ marked with signs } +, -. \end{cases} x \in [1,5; 2].$$

Искомая сумма: $2 \cdot (1,5 + 2) = 2 \cdot 3,5 = 7$.

Ответ: 7.

В4. Воспользуемся формулой разности синусов:

$$2 \sin \frac{x+16^\circ - x-4^\circ}{2} \cos \frac{x+16^\circ + x+4^\circ}{2} = \sin 6^\circ; \quad 2 \sin 6^\circ \cdot \cos(x+10^\circ) = \sin 6^\circ.$$

Разделим обе части уравнения на $\sin 6^\circ$ и получим $2 \cos(x + 10^\circ) = 1$; $\cos(x + 10^\circ) = \frac{1}{2}$;

$$x+10^\circ=\pm 60^\circ+360^\circ n, \quad n \in \mathbf{Z}; \quad \begin{cases} x=50^\circ+360^\circ n, \\ x=-70^\circ+360^\circ n, \quad n \in \mathbf{Z}. \end{cases}$$

Наибольший отрицательный корень уравнения равен -70° .

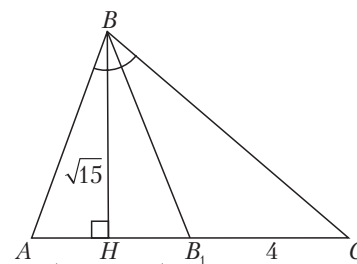
Ответ: -70 .

В5. 1) По теореме о биссектрисе угла треугольника $\frac{AB}{BC} = \frac{AB_1}{B_1C}$, т. е. $\frac{AB}{BC} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$,

тогда $AB = x$; $BC = 2x$.

2) Треугольники ABH и HBC — прямоугольные. Пусть $AH = y$, тогда $CH = 6 - y$. По теореме Пифагора $AB^2 = AH^2 + BH^2$ и $BC^2 = CH^2 + BH^2$. Составим систему уравнений:

$$\begin{cases} x^2 = y^2 + (\sqrt{15})^2, \\ (2x)^2 = (6-y)^2 + (\sqrt{15})^2; \end{cases} \begin{cases} x^2 = y^2 + 15, \\ 4x^2 = 36 - 12y + y^2 + 15; \end{cases} \begin{cases} 4x^2 = 4y^2 + 60, \\ 4x^2 = 36 - 12y + y^2 + 15. \end{cases}$$



Вычтем из первого уравнения системы второе и получим уравнение $3y^2 + 12y + 9 = 0$ или $y^2 + 4y + 3 = 0$, корнями которого являются числа -3 ; -1 . Так как длина отрезка не может быть отрицательным числом, то вид треугольника ABC не соответствует условиям задачи.

3) Рассмотрим тупоугольный треугольник ABC . Тогда если $AH = y$, то $CH = 6 + y$ и система принимает вид:

$$\begin{cases} x^2 = y^2 + (\sqrt{15})^2, \\ (2x)^2 = (6+y)^2 + (\sqrt{15})^2; \end{cases} \begin{cases} 4x^2 = 4y^2 + 60, \\ 4x^2 = 36 + 12y + y^2 + 15. \end{cases}$$

В этом случае $3y^2 - 12y + 9 = 0$ и $y^2 - 4y + 3 = 0$. Тогда $y = 1$; 3 .

Пусть $y = 1$, тогда $BC^2 = CH^2 + BH^2 = 49 + 15 = 64$; $BC = 8$.

Пусть $y = 3$, тогда $BC^2 = 81 + 15 = 96$; $BC = \sqrt{96} = 4\sqrt{6}$.

Целочисленное значение наибольшей стороны треугольника равно 8.

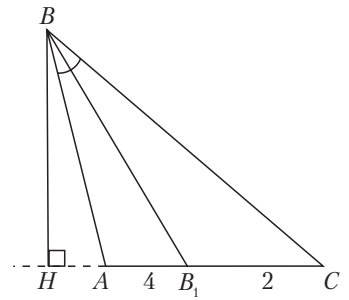
Ответ: 8.

В6. Заметим, что при $x > 0$ функции $y = 2x^2$; $y = -\frac{9}{x}$; $y = \sqrt{3x+1}$ возрастают. Тогда функция $y = 2x^2 - \frac{9}{x} + \sqrt{3x+1}$ возрастает при $x > 0$ (как сумма возрастающих функций). В этом случае исходное уравнение имеет не более одного корня. Найдем его подбором.

При $x = 5$ получим $2 \cdot 5^2 - \frac{9}{5} + \sqrt{3 \cdot 5 + 1} = 2 \cdot 25 - 1,8 + \sqrt{16} = 50 - 1,8 + 4 = 52,2$.

То есть число 5 является единственным корнем исходного уравнения.

Ответ: 5.



ТЕСТ 4

Часть А

A1. Вершиной данной параболы является точка с координатами $(n; m)$.

Ответ: 4.

A2. Пусть N — число, равное произведению цифр натурального числа. Тогда N можно представить в виде произведения множителей, каждый из которых является цифрой. Проанализируем предлагаемые ответы:

- 1) $45 = 5 \cdot 9$; 2) $63 = 7 \cdot 9$;
3) $33 = 3 \cdot 11$; 4) $56 = 7 \cdot 8 = 7 \cdot 4 \cdot 2 = 7 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$;
5) $5 = 5 \cdot 1$.

Очевидно, что только число 33 нельзя представить в виде произведения цифр, так как 11 не является цифрой.

Ответ: 3.

A3. 1) $\sqrt{-9^2} = \sqrt{-81}$ — не имеет смысла, так как арифметического квадратного корня из отрицательного числа не существует;

2) $\frac{15}{\frac{1}{7} : 7 - \frac{1}{49}} = \frac{15}{\frac{1}{7} \cdot \frac{1}{7} - \frac{1}{49}} = \frac{15}{\frac{1}{49} - \frac{1}{49}} = \frac{15}{0}$ — не имеет смысла, так как на ноль делить нельзя;

3) $(32 - 2^5)^0 = (32 - 32)^0 = 0^0$ — ноль в нулевой степени не имеет смысла;

4) $-\sqrt[3]{-\sqrt{7}} = \sqrt[3]{\sqrt{7}} = \sqrt[6]{7}$ — выражение имеет смысл;

5) $\left(1,125 - \frac{9}{8}\right)^{-1} = \left(1\frac{1}{8} - \frac{9}{8}\right)^{-1} = \left(\frac{9}{8} - \frac{9}{8}\right)^{-1} = 0^{-1}$ — не имеет смысла, так как на ноль делить нельзя.

Ответ: 4.

A4. Так как боковой гранью куба является квадрат, то с помощью формулы $d = a\sqrt{2}$ найдем $a = \frac{d}{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 2$.

Найдем объем куба: $V = a^3$; $V = 2^3 = 8$.

Ответ: 5.

A5. $\left(\frac{1}{a} + 1\right) \left(\frac{a}{1+\sqrt{a}} - \frac{a}{\sqrt{a}-1} + 2 \cdot \frac{1+a^2}{a^2-1} \right) = -\frac{2}{a}$.

1) $\frac{1}{a} + 1 = \frac{1+a}{a}$;

2) $\frac{a}{1+\sqrt{a}} - \frac{a}{\sqrt{a}-1} = \frac{a^{\sqrt{a}-1}}{1+\sqrt{a}} - \frac{a^{1+\sqrt{a}}}{\sqrt{a}-1} = \frac{a^{\sqrt{a}-1}}{1+\sqrt{a}} - \frac{a^{1+\sqrt{a}}}{\sqrt{a}-1} = \frac{a(\sqrt{a}-1) - a(1+\sqrt{a})}{(1+\sqrt{a})(\sqrt{a}-1)} = \frac{a(\sqrt{a}-1-1-\sqrt{a})}{a-1} = \frac{-2a}{a-1}$;

3) $\frac{-2a}{a-1} + 2 \cdot \frac{1+a^2}{a^2-1} = \frac{-2a^{\sqrt{a}+1}}{a-1} + \frac{2 \cdot (1+a^2)}{(a-1)(a+1)} = \frac{-2a(a+1) + 2 \cdot (1+a^2)}{(a-1)(a+1)} = \frac{-2a^2 - 2a + 2 + 2a^2}{(a-1)(a+1)} = \frac{-2a+2}{(a-1)(a+1)} =$
 $= \frac{-2(a-1)}{(a-1)(a+1)} = \frac{-2}{a+1}$;

4) $\frac{1+a}{a} \cdot \frac{-2}{a+1} = -\frac{2}{a}$.

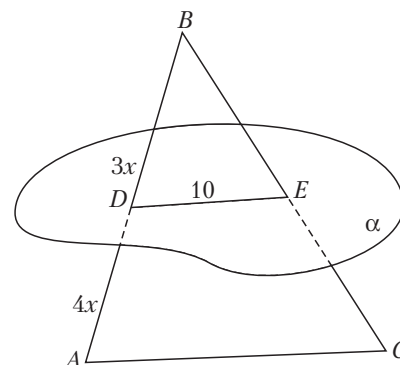
Ответ: 4.

A6. Так как $AC \parallel \alpha$ и $(ABC) \cap \alpha = DE$, то $AC \parallel DE$.

Тогда треугольники BDE и ABC подобны, значит, $\frac{AC}{DE} = \frac{BA}{BD}$, т. е.

$\frac{AC}{10} = \frac{7}{3}$; $AC = \frac{70}{3} = 23\frac{1}{3}$.

Ответ: 4.



$$\text{A7. } \frac{\sin 80^\circ + \sin 40^\circ}{\sqrt{3}(\cos 80^\circ + \cos 40^\circ)} = \frac{2 \sin \frac{80^\circ + 40^\circ}{2} \cos \frac{80^\circ - 40^\circ}{2}}{\sqrt{3} \cdot 2 \cos \frac{80^\circ + 40^\circ}{2} \cos \frac{80^\circ - 40^\circ}{2}} = \frac{\sin 60^\circ}{\sqrt{3} \cos 60^\circ} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 1.$$

Ответ: 1.

A8. Так как треугольник AOC — равнобедренный ($AO = CO$ как радиусы), то $\angle ACO = \angle CAO = 30^\circ$.

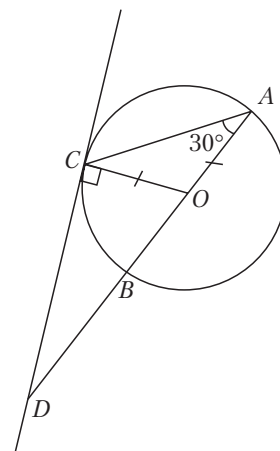
По свойству касательной $OC \perp CD$, тогда в треугольнике ACD $\angle CAD = 30^\circ$, $\angle ACD = \angle ACO + \angle OCD = 30^\circ + 90^\circ = 120^\circ$. По теореме о сумме углов треугольника $\angle CDA = 180^\circ - (30^\circ + 120^\circ) = 30^\circ$.

Поскольку $\angle CAD = \angle ADC = 30^\circ$, то треугольник ACD — равнобедренный.

Ответ: 1.

A9. Пусть $\frac{m}{n}$ — исходная дробь. Если ее числитель увеличить на 60 %, а знаменатель уменьшить на 20 %, то получим дробь $\frac{m+0,6m}{n-0,2n} = \frac{1,6m}{0,8n} = 2 \cdot \frac{m}{n}$. Так как получившаяся дробь в два раза больше исходной, то исходная дробь увеличилась на 100 %.

Ответ: 4.



Часть В

B1. В данной арифметической прогрессии $a_1 = -22$; $a_2 = -18$, тогда $d = a_2 - a_1 = -18 - (-22) = 4$.

С помощью формулы $S_n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n$ получим

$$S_n = \frac{2 \cdot (-22) + 4(n-1)}{2} \cdot n = (-22 + 2(n-1)) \cdot n = (-22 + 2n - 2) \cdot n = (2n - 24) \cdot n = 2n^2 - 24n.$$

Найдем наименьшее значение выражения:

$$2n^2 - 24n = 2(n^2 - 12n) = 2(n^2 - 2 \cdot 6n + 6^2 - 6^2) = 2((n-6)^2 - 36) = 2(n-6)^2 - 72.$$

Наименьшее значение данного выражения равно -72 , причем достигается оно при $n = 6$.

Ответ: 6.

B2. Область определения выражения $\frac{\arcsin(x+2)}{\pi - 2\text{arccctg}(x+1)}$ совпадает с множеством решений системы неравенств

$$\begin{cases} -1 \leq x+2 \leq 1, \\ \text{arccctg}(x+1) \neq \frac{\pi}{2}; \end{cases} \quad \begin{cases} -3 \leq x \leq -1, \\ x+1 \neq \text{ctg} \frac{\pi}{2}; \end{cases} \quad \begin{cases} -3 \leq x \leq -1, \\ x+1 \neq 0; \end{cases} \quad \begin{cases} -3 \leq x \leq -1, \\ x \neq -1; \end{cases} \quad x \in [-3; -1).$$

Сумма целых чисел из области определения данного выражения равна $-3 - 2 = -5$.

Ответ: -5 .

B3. Запишем неравенство в виде $(2x^2 - x - 2)^2 - (x^2 + 5x + 4)^2 \geq 0$ и воспользуемся формулой разности квадратов двух выражений:

$$((2x^2 - x - 2) - (x^2 + 5x + 4))((2x^2 - x - 2) + (x^2 + 5x + 4)) \geq 0;$$

$$(2x^2 - x - 2 - x^2 - 5x - 4)(2x^2 - x - 2 + x^2 + 5x + 4) \geq 0; (x^2 - 6x - 6)(3x^2 + 4x + 2) \geq 0.$$

Рассмотрим квадратный трехчлен $3x^2 + 4x + 2$.

Так как $D = 4^2 - 4 \cdot 3 \cdot 2 = 16 - 24 < 0$ и $a = 3 > 0$, то $3x^2 + 4x + 2 > 0$ при $x \in \mathbf{R}$.

Тогда последнее неравенство равносильно неравенству $x^2 - 6x - 6 \geq 0$. $D = (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6) = 36 + 24 = 60$;

$$x_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{60}}{2} = \frac{6 \pm \sqrt{4 \cdot 15}}{2} = \frac{6 \pm 2\sqrt{15}}{2} = \frac{2(3 \pm \sqrt{15})}{2} = 3 \pm \sqrt{15}.$$

Тогда $x \in (-\infty; 3 - \sqrt{15}] \cup [3 + \sqrt{15}; +\infty)$. Так как $6 < 3 + \sqrt{15} < 7$, то наименьшим натуральным решением неравенства является число 7.

Ответ: 7.

B4. Так как наименьший положительный период функции $y = f(x)$ равен 3, то ее периодом является любое число вида $3n$, где $n \in \mathbb{Z}$.

Значения функций $y = f(x)$ и $y = f\left(x + \frac{24}{k}\right)$ будут совпадать в том случае, когда выражение $\frac{24}{k}$ окажется периодом данной функции, т. е. будет иметь вид $3n$.

Значит, $\frac{24}{k} = 3n$; $\frac{8}{k} = n$. Учитывая, что по условию задачи k — натуральное число, то $k = 1; 2; 4; 8$. Сумма найденных значений k равна 15.

Ответ: 15.

B5. 1) В прямоугольном треугольнике ABC $PO = \sqrt{3}$ и $OM = \sqrt{7}$.

2) Так как треугольник AOP подобен треугольнику ANC , то $\frac{PO}{CN} = \frac{AO}{AN}$. Поскольку O — точка пересечения медиан треугольника ABC , то $\frac{AO}{AN} = \frac{2}{3}$. Тогда $\frac{PO}{CN} = \frac{2}{3}$; $\frac{\sqrt{3}}{CN} = \frac{2}{3}$; $CN = \frac{3\sqrt{3}}{2}$.

AN — медиана треугольника ABC , значит, $BC = 2 \cdot CN = 2 \cdot \frac{3\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$.

3) Рассмотрим подобные треугольники BOM и BFC , найдем, что

$$AC = 2 \cdot CF = 2 \cdot \frac{3\sqrt{7}}{2} = 3\sqrt{7}.$$

4) В прямоугольном треугольнике ABC найдем гипотенузу и площадь:

$$AB = \sqrt{CB^2 + AC^2} = \sqrt{(3\sqrt{3})^2 + (3\sqrt{7})^2} = \sqrt{9 \cdot 3 + 9 \cdot 7} = 3\sqrt{10}; S_{ABC} = \frac{AC \cdot BC}{2} = \frac{3\sqrt{7} \cdot 3\sqrt{3}}{2} = \frac{9\sqrt{21}}{2}.$$

5) Так как медианы делят треугольник на шесть равновеликих треугольников, то

$$S_{AOB} = \frac{1}{3} S_{ABC} = \frac{1}{3} \cdot \frac{9\sqrt{21}}{2} = \frac{3\sqrt{21}}{2}. \text{ Вместе с тем } S_{AOB} = \frac{AB \cdot OH}{2}, \text{ т. е. } \frac{3\sqrt{21}}{2} = \frac{3\sqrt{10} \cdot OH}{2}; OH = \frac{\sqrt{21}}{\sqrt{10}}, \text{ и значение}$$

$$\text{искового выражения равно } 10 \cdot OH^2 = 10 \cdot \left(\frac{\sqrt{21}}{\sqrt{10}}\right)^2 = 21.$$

Ответ: 21.

B6. Рассмотрим первое уравнение системы. Пусть $A(2;4)$;

$B(5;8)$; $C(x;y)$ — точки координатной плоскости. Тогда по формуле расстояния между двумя точками $d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$ получим:

$$CA = \sqrt{(x-2)^2 + (y-4)^2} \text{ и } CB = \sqrt{(x-5)^2 + (y-8)^2}.$$

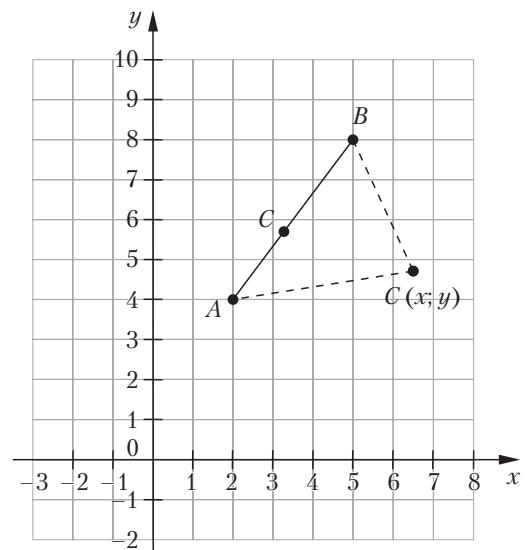
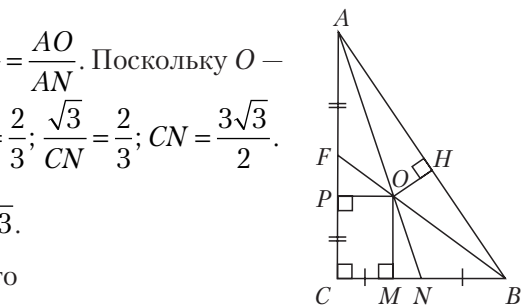
$$\text{Так как } \sqrt{(x-2)^2 + (y-4)^2} + \sqrt{(x-5)^2 + (y-8)^2} = 5, \text{ то}$$

$$CA + CB = 5.$$

Найдем расстояние между точками A и B :

$$AB = \sqrt{(2-5)^2 + (4-8)^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5.$$

Итак, $CA + CB = 5$ и $AB = 5$, значит, точка C принадлежит отрезку AB . Сделанный вывод позволяет заменить первое уравнение системы уравнением прямой $y = kx + b$, проходящей через точки A и B .



Решив систему уравнений $\begin{cases} 4 = 2k + b, \\ 8 = 5k + b, \end{cases}$ получим, что $y = \frac{4}{3}x + \frac{4}{3}$ — уравнение прямой, проходящей через точки A и B .

Так как точка C принадлежит отрезку AB , то $2 \leq x \leq 5$, и исходная система принимает вид
$$\begin{cases} y = \frac{4}{3}x + \frac{4}{3}, \\ 2 \leq x \leq 5, \\ 2xy - 8x = 14. \end{cases}$$

Решим полученную систему:

$$\begin{cases} y = \frac{4}{3}x + \frac{4}{3}, \\ 2 \leq x \leq 5, \\ x\left(\frac{4}{3}x + \frac{4}{3}\right) - 4x = 7; \end{cases} \quad \begin{cases} y = \frac{4}{3}x + \frac{4}{3}, \\ 2 \leq x \leq 5, \\ \frac{4}{3}x^2 + \frac{4}{3}x - 4x - 7 = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} y = \frac{4}{3}x + \frac{4}{3}, \\ 2 \leq x \leq 5, \\ 4x^2 - 8x - 21 = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} y = \frac{4}{3}x + \frac{4}{3}, \\ 2 \leq x \leq 5, \\ 4x^2 - 8x - 21 = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} y = \frac{4}{3}x + \frac{4}{3}, \\ 2 \leq x \leq 5; \\ \begin{cases} x = 3,5, \\ x = -1,5. \end{cases} \end{cases}$$

С учетом условия $2 \leq x \leq 5$, $x = 3,5$, тогда $y = \frac{4}{3} \cdot 3,5 + \frac{4}{3} = \frac{4}{3} \cdot (3,5 + 1) = \frac{4}{3} \cdot 4,5 = 6$, и значение искомого выражения $xy = 3,5 \cdot 6 = 21$.

Ответ: 21.

ТЕСТ 5

Часть А

A1. Расстояние между точками $F(x_1)$ и $N(x_2)$ можно вычислить по формуле $FN = |x_1 - x_2|$.

Ответ: 5.

A2. $627,\underline{9}5 \approx 628,0$.

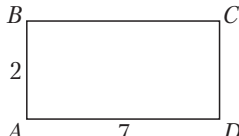
Ответ: 4.

A3. Фигуры называются равновеликими, если их площади равны.

Площадь квадрата со стороной $\sqrt{15}$ равна $(\sqrt{15})^2 = 15$.

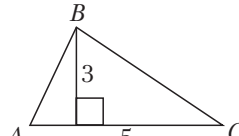
Найдем площади фигур, изображенных на рисунке:

1) $ABCD$ — прямоугольник;



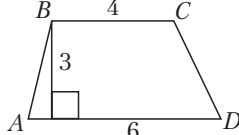
$S = a \cdot b; \quad S = 2 \cdot 7 = 14;$

2) ABC — треугольник;



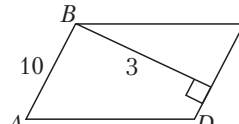
$S = \frac{ah}{2}; \quad S = \frac{3 \cdot 5}{2} = 7,5;$

3) $ABCD$ — трапеция;



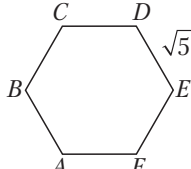
$S = \frac{a+b}{2} \cdot h; \quad S = \frac{4+6}{2} \cdot 3 = 15;$

4) $ABCD$ — параллелограмм;



$S = a \cdot h; \quad S = 10 \cdot 3 = 30;$

5) $ABCDEF$ — правильный шестиугольник;



$S = \frac{3a^2\sqrt{3}}{2}; \quad S = \frac{3(\sqrt{3})^2\sqrt{3}}{2} = \frac{15\sqrt{3}}{2}.$

Ответ: 3.

A4. 1) $a = \sqrt[3]{108 \cdot 128} - \sqrt[4]{8 \cdot 162} = \sqrt[3]{27 \cdot 4 \cdot 64 \cdot 2} - \sqrt[4]{8 \cdot 2 \cdot 81} = 3 \cdot 4 \cdot 2 - 2 \cdot 3 = 24 - 6 = 18$.

2) НОК(15; 18) = 90.

Ответ: 4.

A5. 1) Найдем абсциссу вершины параболы: $x_v = -\frac{b}{2a}; \quad x_v = -\frac{12}{2 \cdot (-2)} = 3$.

2) Уравнение оси симметрии параболы: $x = 3$.

3) Прямой $x = 3$ принадлежит точка (3; 19).

Ответ: 3.

A6. Воспользуемся формулами приведения и получим:

$$\begin{aligned} \frac{10}{\sqrt{2}} \operatorname{ctg} 135^\circ \sin 210^\circ \cos 225^\circ &= \frac{10}{\sqrt{2}} \operatorname{ctg}(180^\circ - 45^\circ) \cdot \sin(180^\circ + 30^\circ) \cdot \cos(180^\circ + 45^\circ) = \\ &= \frac{10}{\sqrt{2}} (-\operatorname{ctg} 45^\circ) \cdot (-\sin 30^\circ) \cdot (-\cos 45^\circ) = \frac{10}{\sqrt{2}} \cdot (-1) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -2,5. \end{aligned}$$

Ответ: 1.

A7. $\frac{15-7x-4x^2}{16x^2-25} = \frac{-4x^2-7x+15}{16x^2-25}.$

С помощью формулы $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$ разложим на множители квадратный трехчлен $-4x^2-7x+15$.

$$-4x^2-7x+15=0; 4x^2+7x-15=0,$$

$$D=7^2-4\cdot 4\cdot (-15)=49+240=289; x_{1,2}=\frac{-7\pm 17}{8}; x_1=\frac{5}{4}; x_2=-3.$$

Тогда $-4x^2-7x+15=-4\left(x-\frac{5}{4}\right)(x+3)=-(4x-5)(x+3).$

Таким образом, $\frac{-4x^2-7x+15}{16x^2-25}=\frac{-(4x-5)(x+3)}{(4x-5)(4x+5)}=-\frac{x+3}{4x+5}.$

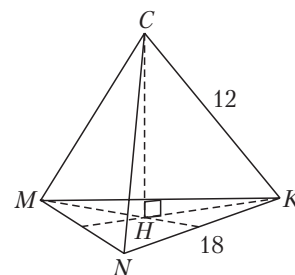
Ответ: 3.

A8. Проведем $CH \perp (MKN)$. Так как треугольник MNK — равносторонний, то H — центр данного треугольника, тогда

$$HK = \frac{2}{3} \cdot \frac{NK\sqrt{3}}{2} = \frac{18\sqrt{3}}{3} = 6\sqrt{3}.$$

Из прямоугольного треугольника CHK по теореме Пифагора найдем:

$$CH = \sqrt{CK^2 - HK^2} = \sqrt{12^2 - (6\sqrt{3})^2} = 6.$$



Ответ: 2.

A9. $(x+1)(|x|-1) = \frac{1}{2};$ $\begin{cases} x \geq 0, \\ (x+1)(x-1) = \frac{1}{2}; \end{cases}$ $\begin{cases} x \geq 0, \\ x^2 - 1 = \frac{1}{2}; \end{cases}$ $\begin{cases} x \geq 0, \\ x^2 = \frac{3}{2}; \end{cases}$ $\begin{cases} x \geq 0, \\ x = \pm \frac{\sqrt{6}}{2}; \end{cases}$ $x = \frac{\sqrt{6}}{2}.$

Таким образом, уравнение имеет один корень.

Ответ: 1.

Часть В

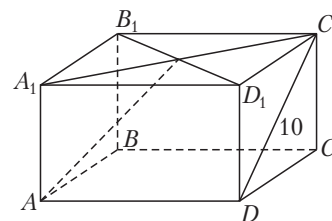
B1. 1) Так как треугольник DCC_1 — прямоугольный, то по теореме Пифагора

$$CC_1 = \sqrt{DC_1^2 - DC^2}; CC_1 = \sqrt{100 - 36} = 8.$$

2) Так как $A_1B_1C_1D_1$ — квадрат, то $A_1O = \frac{1}{2}A_1C_1 = \frac{1}{2} \cdot 6\sqrt{2} = 3\sqrt{2}.$

3) Из прямоугольного треугольника AA_1O получим, что

$$AO^2 = OA_1^2 + AA_1^2; AO^2 = (3\sqrt{2})^2 + 8^2 = 18 + 64 = 82.$$



Ответ: 82.

B2. $(x^2 - x - 1)(x^2 - x - 7) \leq -5.$

Пусть $x^2 - x = t$, тогда неравенство принимает вид $(t-1)(t-7) \leq -5$. Тогда $t^2 - 7t - t + 7 + 5 \leq 0$; $t^2 - 8t + 12 \leq 0$; $(t-2)(t-6) \leq 0$. Так как $t = x^2 - x$, то $(x^2 - x - 2)(x^2 - x - 6) \leq 0$; $(x-2)(x+1)(x-3)(x+2) \leq 0$.

Воспользуемся методом интервалов: $\begin{array}{ccccccc} & + & & - & & + & & - & & + \\ & & -2 & & -1 & & 2 & & 3 & \\ & & \bullet & & \bullet & & \bullet & & \bullet & \end{array} \rightarrow x \in [-2; -1] \cup [2; 3].$

Найдем сумму целых решений неравенства: $-2 + (-1) + 2 + 3 = 2.$

Ответ: 2.

$$\begin{aligned} \text{В3. } \frac{a^{-1} + (b+c)^{-1}}{a^{-1} - (b+c)^{-1}} \cdot \left(a^0 + \left(\frac{2bc}{b^2 + c^2 - a^2} \right)^{-1} \right) &= \frac{\frac{1}{a} + \frac{1}{b+c}}{\frac{1}{a} - \frac{1}{b+c}} \cdot \left(1 + \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \right) = \frac{a+b+c}{b+c-a} \cdot \frac{2bc + b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \\ &= \frac{a+b+c}{b+c-a} \cdot \frac{(b+c)^2 - a^2}{2bc} = \frac{a+b+c}{b+c-a} \cdot \frac{(a+b+c)(b+c-a)}{2bc} = \frac{(a+b+c)^2}{2bc} \Big|_{a+b+c=\sqrt{2}, bc=1} = \frac{(\sqrt{2})^2}{2 \cdot 1} = 1. \end{aligned}$$

Ответ: 1.

В4. Воспользуемся формулами понижения степени и получим:

$$\frac{1 - \cos 22x}{2} = \frac{1 + \cos 34x}{2}; \quad \cos 34x + \cos 22x = 0; \quad 2 \cos \frac{34x + 22x}{2} \cos \frac{34x - 22x}{2} = 0; \quad \cos 28x \cdot \cos 6x = 0;$$

$$\begin{cases} \cos 28x = 0, \\ \cos 6x = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} 28x = \frac{\pi}{2} + \pi n, \\ 6x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbf{Z}; \end{cases} \quad \begin{cases} x = \frac{\pi}{56} + \frac{\pi}{28} n, \\ x = \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{6} n, n \in \mathbf{Z}. \end{cases}$$

Найдем количество чисел вида $\frac{\pi}{56} + \frac{\pi}{28} n, n \in \mathbf{Z}$, принадлежащих промежутку $\left[-\frac{\pi}{7}; \frac{\pi}{12}\right]$:

$$-\frac{\pi}{7} \leq \frac{\pi}{56} + \frac{\pi}{28} n \leq \frac{\pi}{12}; \quad -8\pi \leq \pi + 2\pi n \leq \frac{14\pi}{3}; \quad -8 \leq 1 + 2n \leq \frac{14}{3}; \quad -9 \leq 2n \leq \frac{11}{3}; \quad -4,5 \leq n \leq \frac{5}{6}.$$

Промежутку $\left[-4,5; 1\frac{5}{6}\right]$ принадлежат шесть целых чисел, значит, шесть чисел вида $\frac{\pi}{56} + \frac{\pi}{28} n, n \in \mathbf{Z}$, являющихся корнями исходного уравнения, принадлежат промежутку $\left[-\frac{\pi}{7}; \frac{\pi}{12}\right]$.

Рассмотрим вторую серию корней $x = \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{6} n, n \in \mathbf{Z}$, и выясним, сколько корней из данной серии находятся в промежутке $\left[-\frac{\pi}{7}; \frac{\pi}{12}\right]$.

$$-\frac{\pi}{7} \leq \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{6} n \leq \frac{\pi}{12}; \quad -\frac{12\pi}{7} \leq \pi + 2\pi n \leq \pi; \quad -\frac{12}{7} \leq 1 + 2n \leq 1; \quad -\frac{19}{7} \leq 2n \leq 0; \quad -1\frac{5}{14} \leq n \leq 0.$$

Два целых значения n удовлетворяют полученному условию.

Таким образом, исходное уравнение имеет восемь корней на данном промежутке.

Ответ: 8.

$$\text{В5. } \begin{cases} x^2 - 5y^2 - 3x - y + 22 = 0, \\ (x-3)(y-2) = y^2 - 3y + 2; \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 - 5y^2 - 3x - y + 22 = 0, \\ (x-3)(y-2) = (y-1)(y-2); \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 - 5y^2 - 3x - y + 22 = 0, \\ (x-3)(y-2) - (y-1)(y-2) = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 - 5y^2 - 3x - y + 22 = 0, \\ (y-2)(x-3-y+1) = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 - 5y^2 - 3x - y + 22 = 0; \\ \begin{cases} y-2=0, \\ x-y-2=0; \end{cases} \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 - 5y^2 - 3x - y + 22 = 0; \\ \begin{cases} y=2, \\ x=y+2; \end{cases} \end{cases}$$

$$\begin{cases} y=2, \\ x^2 - 5y^2 - 3x - y + 22 = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} y=2, \\ x^2 - 20 - 3x - 2 + 22 = 0; \\ x=y+2, \\ (y+2)^2 - 5y^2 - 3(y+2) - y + 22 = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} y=2, \\ x^2 - 3x = 0; \\ x=y+2, \\ y^2 + 4y + 4 - 5y^2 - 3y - 6 - y + 22 = 0; \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{l} y=2, \\ x(x-3)=0; \end{array} \right. \left[\begin{array}{l} y=2, \\ x(x-3)=0; \end{array} \right. \left[\begin{array}{l} y=2; \\ x=0, \\ x=3; \end{array} \right. \left[\begin{array}{l} y=2; \\ x=0, \\ x=3; \end{array} \right. \left[\begin{array}{l} x=0, \\ y=2; \\ x=\sqrt{5}+2, \\ y=\sqrt{5}; \\ x=-\sqrt{5}+2, \\ y=-\sqrt{5}. \end{array} \right.$$

Таким образом, система имеет четыре решения: $(0; 2); (3; 2); (\sqrt{5}+2; \sqrt{5}); (-\sqrt{5}+2; -\sqrt{5})$.

Ответ: 4.

В6.

	Масса слитка	Масса меди
Первый слиток	5	$0,3 \cdot 5 = 1,5$
Второй слиток	3	$0,3 \cdot 3 = 0,9$
Третий слиток	x	y
Первый сплав	$5+x$	$0,56 \cdot (5+x) = 1,5+y$
Второй сплав	$3+x$	$0,6 \cdot (3+x) = 0,9+y$

Составим систему уравнений: $\begin{cases} 0,56 \cdot (5+x) = 1,5+y, \\ 0,6 \cdot (3+x) = 0,9+y; \end{cases} \begin{cases} 2,8+0,56x = 1,5+y, \\ 1,8+0,6x = 0,9+y. \end{cases}$

Вычтем из второго уравнения системы первое и получим: $-1+0,04x = -0,6$; $0,04x = 0,4$; $x = 10$.

Таким образом, масса третьего слитка 10 кг.

Ответ: 10.

ТЕСТ 6

Часть А

A1. Формула разложения квадратного трехчлена на множители: $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$.

Ответ: 4.

A2. $12 + 15 = 27$ (км/ч) — скорость сближения велосипедистов.

$135 - 27 = 108$ (км) — расстояние, которое проехали два велосипедиста за искомое время.

$108 : 27 = 4$ (ч) — искомое время.

Ответ: 4.

A3. $0,5^{-2} - 5 \cdot (-2)^{-2} + \left(\frac{2}{3}\right)^{-2} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} - 5 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 = 2^2 - 5 \cdot \frac{1}{4} + \frac{9}{4} = 4 - \frac{5}{4} + \frac{9}{4} = 5$.

Ответ: 5.

A4. Запишем выражение $2 - \frac{3}{x}$ в виде $2 + \left(-3 \cdot \frac{1}{x}\right)$ и последовательно оценим выражения $\frac{1}{x}$; $-3 \cdot \frac{1}{x}$ и $2 + \left(-3 \cdot \frac{1}{x}\right)$.

Так как $2 < x \leq 5$, то:

$\frac{1}{5} \leq \frac{1}{x} < \frac{1}{2}$. Умножим все части последнего неравенства на -3 и получим:

$-3 \cdot \frac{1}{5} \geq -3 \cdot \frac{1}{x} > -3 \cdot \frac{1}{2}$; $-\frac{3}{5} \geq -\frac{3}{x} > -\frac{3}{2}$ или $-\frac{3}{2} < -\frac{3}{x} \leq -\frac{3}{5}$. Прибавим ко всем частям последнего неравен-

ства 2: $2 - \frac{3}{2} < 2 - \frac{3}{x} \leq 2 - \frac{3}{5}$, т. е. $\frac{1}{2} < 2 - \frac{3}{x} \leq 1\frac{2}{5}$.

Ответ: 3.

A5.
$$\begin{cases} \frac{3x-2y}{2y+3x} = -0,2, \\ \frac{1}{3x+2y} - 2y + 3x = -\frac{4}{5}. \end{cases}$$
 Пусть $a = 3x + 2y$; $b = 3x - 2y$, тогда система принимает вид

$$\begin{cases} \frac{b}{a} = -0,2, \\ \frac{1}{a} + b = -\frac{4}{5}; \end{cases} \begin{cases} b = -\frac{a}{5}, \\ \frac{1}{a} + b = -\frac{4}{5}; \end{cases} \begin{cases} b = -\frac{a}{5}, \\ \frac{1}{a} - \frac{a}{5} = -\frac{4}{5}; \end{cases} \begin{cases} b = -\frac{a}{5}, \\ \frac{5-a^2}{5a} = -\frac{4}{5}; \end{cases} \begin{cases} b = -\frac{a}{5}, \\ \frac{5-a^2}{a} = -4; \end{cases} \begin{cases} b = -\frac{a}{5}, \\ 5-a^2 = -4a, \\ a \neq 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} b = -\frac{a}{5}, \\ a^2 - 4a - 5 = 0, \\ a \neq 0; \end{cases} \begin{cases} b = -\frac{a}{5}; \\ \begin{cases} a = 5, \\ a = -1; \end{cases} \\ a \neq 0; \end{cases} \begin{cases} \begin{cases} a = 5, \\ a = -1, \end{cases} \\ b = \frac{1}{5}. \end{cases}$$

То есть
$$\begin{cases} \begin{cases} 3x+2y=5, \\ 3x-2y=-1; \end{cases} \\ \begin{cases} 3x+2y=-1, \\ 3x-2y=\frac{1}{5}; \end{cases} \end{cases} \begin{cases} \begin{cases} 6x=4, \\ 3x-2y=-1; \end{cases} \\ \begin{cases} 6x=-\frac{4}{5}, \\ 3x-2y=\frac{1}{5}; \end{cases} \end{cases} \begin{cases} \begin{cases} x=\frac{2}{3}, \\ 3 \cdot \frac{2}{3} - 2y = -1; \end{cases} \\ \begin{cases} x=-\frac{2}{15}, \\ 3 \cdot \left(-\frac{2}{15}\right) - 2y = \frac{1}{5}; \end{cases} \end{cases} \begin{cases} \begin{cases} x=\frac{2}{3}, \\ -2y=-3; \end{cases} \\ \begin{cases} x=-\frac{2}{15}, \\ 2y=-\frac{3}{5}; \end{cases} \end{cases} \begin{cases} \begin{cases} x=\frac{2}{3}, \\ y=1,5; \end{cases} \\ \begin{cases} x=-\frac{2}{15}, \\ y=-\frac{3}{10}. \end{cases} \end{cases}$$

Тогда наибольшее значение выражения $x_0 \cdot y_0 = \frac{2}{3} \cdot 1,5 = 1$.

Ответ: 2.

A6. Так как:

- 1) при $a < 0 < b$ $\sqrt[4]{(a-b)^4} = |a-b| = b-a$;
- 2) при $a < 0$ $\sqrt{16a^2} = 4|a| = -4a$;
- 3) $\sqrt[3]{27a^3} = 3a$ при любом значении a ,

$$\text{то } \sqrt[4]{(a-b)^4} + \sqrt{16a^2} + \sqrt[3]{27a^3} = b-a-4a+3a = b-2a.$$

Ответ: 1.

A7. Значения выражений $f(1) = 2 \cdot 1 - 1 = 1$; $f(2) = 2 \cdot 2 - 1 = 3$; ...; $f(50) = 2 \cdot 50 - 1 = 99$ представляют собой арифметическую прогрессию с первым членом $a_1 = f(1) = 1$, последним членом $a_{50} = f(50) = 99$, разностью $d = 2$ и количеством членов $n = 50$.

$$\text{По формуле } S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n \text{ получим } S_{50} = \frac{1+99}{2} \cdot 50 = 2500.$$

Ответ: 3.

A8. Так как AM — медиана треугольника ABC , то $CM = \frac{1}{2}BC = 10$.

В треугольнике ACM применим теорему косинусов:

$$CM^2 = AC^2 + AM^2 - 2 \cdot AC \cdot AM \cdot \cos \angle CAM;$$

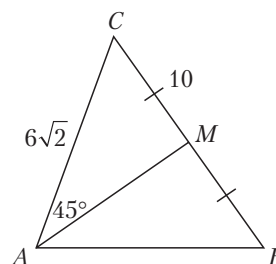
$$100 = 72 + AM^2 - 2 \cdot 6\sqrt{2} \cdot AM \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}; \quad AM^2 - 12 \cdot AM - 28 = 0.$$

По смыслу задачи $AM = 14$.

$$\text{По формуле } S = \frac{1}{2}ab \sin \alpha \text{ найдем площадь треугольника } ACM: S_{ACM} = \frac{1}{2} \cdot 6\sqrt{2} \cdot 14 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 42.$$

Так как медиана делит треугольник на два равновеликих треугольника, то $S_{ABC} = 2 \cdot S_{ACM} = 84$.

Ответ: 2.



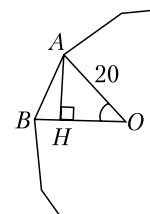
$$\begin{aligned} \text{A9. } & \left(\frac{1}{\sin^2 40^\circ} - \frac{1}{\cos^2 40^\circ} \right) \cdot \frac{2 \sin 80^\circ \operatorname{tg} 40^\circ}{1 - \operatorname{tg}^2 40^\circ} = \frac{\cos^2 40^\circ - \sin^2 40^\circ}{\sin^2 40^\circ \cos^2 40^\circ} \cdot \sin 80^\circ \cdot \frac{2 \operatorname{tg} 40^\circ}{1 - \operatorname{tg}^2 40^\circ} = \\ & = \frac{\cos 80^\circ}{\sin^2 40^\circ \cos^2 40^\circ} \cdot 2 \sin 40^\circ \cos 40^\circ \cdot \operatorname{tg} 80^\circ = \frac{2 \cos 80^\circ}{\sin 40^\circ \cos 40^\circ} \cdot \operatorname{tg} 80^\circ = \frac{4 \cos 80^\circ}{2 \sin 40^\circ \cos 40^\circ} \cdot \operatorname{tg} 80^\circ = \frac{4 \cos 80^\circ}{\sin 80^\circ} \cdot \frac{\sin 80^\circ}{\cos 80^\circ} = 4. \end{aligned}$$

Ответ: 4.

Часть B

B1. 1) Найдем градусную меру угла BOA . Так как двенадцатиугольник — правильный, то $OA = BO$ (как радиусы описанной около двенадцатиугольника окружности) и $\angle BOA = 360^\circ : 12 = 30^\circ$.

2) В прямоугольном треугольнике AON : $\angle BOA = 30^\circ$, гипотенуза $AO = 20$, тогда $AN = \frac{1}{2} \cdot AO = 10$.



Ответ: 10.

B2. Если $\cos x > 0$, то уравнение принимает вид $\operatorname{tg} x = 1$; $x = \frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$. Условию $\cos x > 0$ удовлетворяют числа вида $\frac{\pi}{4} + 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$. Из них только $\frac{\pi}{4} \in [0; 2\pi]$.

Если $\cos x < 0$, то уравнение принимает вид $\operatorname{tg} x = -1$; $x = -\frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$. Условию $\cos x < 0$ удовлетворяют числа вида $\frac{3\pi}{4} + 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$. Из них только $\frac{3\pi}{4} \in [0; 2\pi]$.

Искомая сумма равна $\frac{3\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \pi = 180^\circ$.

Ответ: 180.

В3. Пусть $BP = a$.

1) В прямоугольном треугольнике ABP найдем, что $AB = \frac{1}{2} \cdot BP = \frac{a}{2}$; $AP = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Найдем площадь прямоугольника, являющегося одной из боковых граней призмы: $S = \frac{a}{2} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$, тогда $S_{\text{бок}} = 3 \cdot S = 3 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3a^2\sqrt{3}}{4}$.

2) Найдем площадь основания призмы — равностороннего треугольника CBE :

$$S_{\text{осн}} = \frac{\left(\frac{a}{2}\right)^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = \frac{a^2\sqrt{3}}{16}.$$

3) Тогда площадь полной поверхности призмы равна:

$$S_{\text{полн}} = S_{\text{бок}} + 2 \cdot S_{\text{осн}} = \frac{3a^2\sqrt{3}}{4} + 2 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{16} = \frac{3a^2\sqrt{3}}{4} + \frac{a^2\sqrt{3}}{8} = \frac{7a^2\sqrt{3}}{8}.$$

Так как $a = 4\sqrt[4]{3}$, то $S_{\text{полн}} = \frac{7a^2\sqrt{3}}{8} = \frac{7(4\sqrt[4]{3})^2\sqrt{3}}{8} = \frac{7 \cdot 16 \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{3}}{8} = 7 \cdot 2 \cdot 3 = 42$.

Ответ: 42.

В4. По формуле $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$ разложим на множители квадратный трехчлен $7x^2 - 5x - 2$ и получим $x^2(x+1)^2(x-1)\left(x + \frac{2}{7}\right) \leq 0$.

Воспользуемся методом интервалов: $\begin{array}{ccccccc} + & & + & & - & & - & & + \\ & \bullet & & \bullet & & \bullet & & \bullet & \\ -1 & & -\frac{2}{7} & & 0 & & 1 & & \end{array} \rightarrow x \in \{-1\} \cup \left[-\frac{2}{7}; 1\right]$.

Таким образом, неравенство имеет три целых решения — это числа -1 ; 0 и 1 .

Ответ: 3.

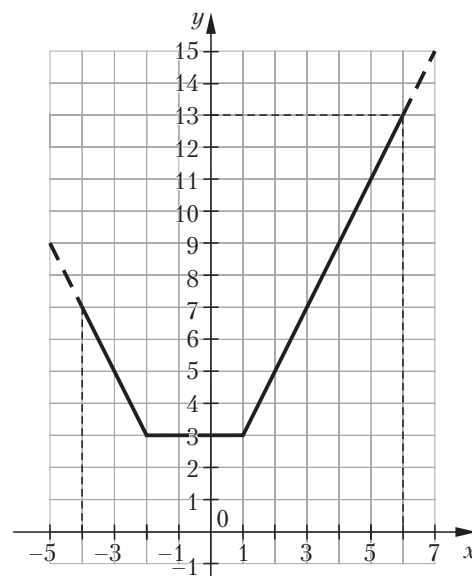
В5. Построим график функции $y = |x+2| + |x-1|$. Составим таблицу:

x	-4	-2	1	6
y	7	3	3	13

С помощью графика выясняем, что на отрезке $[-4; 6]$ множеством значений функции является промежуток $[3; 13]$.

Найдем среднее арифметическое наибольшего и наименьшего значений функции: $\frac{3+13}{2} = 8$.

Ответ: 8.



$$\begin{aligned} \text{В6. } \frac{m^4 + 0,0064}{m^2 + 0,4m + 0,08} &= \frac{(m^4 + 0,16m^2 + 0,0064) - 0,16m^2}{m^2 + 0,4m + 0,08} = \frac{(m^2 + 0,08)^2 - 0,16m^2}{m^2 + 0,4m + 0,08} = \frac{(m^2 + 0,08)^2 - (0,4m)^2}{m^2 + 0,4m + 0,08} = \\ &= \frac{(m^2 + 0,08 - 0,4m)(m^2 + 0,08 + 0,4m)}{m^2 + 0,4m + 0,08} = m^2 - 0,4m + 0,08 = m^2 - 0,4m + 0,04 + 0,04 = (m - 0,2)^2 + 0,04 \geq 0,04 \end{aligned}$$

при всех $m \in \mathbf{R}$, т. е. $M = 0,04$.

Найдем значение искомого выражения: $25 \cdot 0,04 = 1$.

Ответ: 1.

ТЕСТ 7

Часть А

A1. Сечение четырехугольной пирамиды плоскостью изображено на четвертом рисунке.

Ответ: 4.

A2. Графики двух линейных функций ($y = k_1x + b_1$ и $y = k_2x + b_2$) параллельны (не пересекаются), если их угловые коэффициенты равны ($k_1 = k_2$; $b_1 \neq b_2$).

Угловой коэффициент прямой $y = -2 + 3x$ равен 3. Найдем угловые коэффициенты прямых:

1) $y = 3x + 7$; $k = 3$;

2) $y = \frac{15x-8}{5}$; $y = \frac{15x}{5} - \frac{8}{5}$; $y = 3x - \frac{8}{5}$; $k = 3$;

3) $y = 32 + \sqrt{9}x$; $y = 3x + 32$; $k = 3$;

4) $y = 2(1-x) + 5(x+7)$; $y = 2 - 2x + 5x + 35$; $y = 3x + 37$; $k = 3$;

5) $y = 4 - 3x$; $k = -3 \neq 3$.

Таким образом, график функции $y = 4 - 3x$ пересекает график функции $y = -2 + 3x$.

Ответ: 5.

A3.
$$\frac{(-0,5xy^3)^2(2x^2y)^3}{\left(\frac{1}{3}x^5y^3\right)^2} = \frac{(-0,5)^2x^2y^6 \cdot 2^3x^6y^3}{\left(\frac{1}{3}\right)^2x^{10}y^6} = \frac{0,25 \cdot 8 \cdot x^8y^9}{\frac{1}{9}x^{10}y^6} = \frac{2y^3}{\frac{1}{9}x^2} = \frac{18y^3}{x^2}.$$

Ответ: 1.

A4. Числа $\frac{2\pi}{7}$; $\frac{3\pi}{4}$; $\frac{\pi}{5}$; $\frac{\pi}{6}$ принадлежат промежутку $(0; \pi)$. На промежутке $(0; \pi)$ функция $y = \operatorname{ctg} x$ убывает, т. е. большему значению аргумента соответствует меньшее значение функции.

Так как $\frac{3\pi}{4} > \frac{2\pi}{7} > \frac{\pi}{5} > \frac{\pi}{6}$, то $\operatorname{ctg} \frac{3\pi}{4} < \operatorname{ctg} \frac{2\pi}{7} < \operatorname{ctg} \frac{\pi}{5} < \operatorname{ctg} \frac{\pi}{6}$.

Ответ: 1.

A5. Так как боковые ребра пирамиды одинаково наклонены к основанию, то около многоугольника, лежащего в основании пирамиды, можно описать окружность. Из предложенных многоугольников только около прямоугольной трапеции нельзя описать окружность. Значит, основанием данной пирамиды не может быть прямоугольная трапеция.

Ответ: 3.

A6.
$$\frac{x+9}{x^2-3x-10} - \frac{1}{x+2} = \frac{x+15}{x^2-25}.$$

Разложим на множители квадратный трехчлен $x^2 - 3x - 10$ и получим:

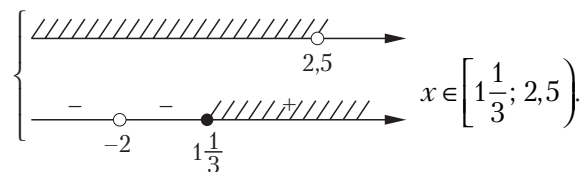
$$\begin{aligned} \frac{x+9}{(x-5)(x+2)} - \frac{1}{x+2} &= \frac{x+15}{(x-5)(x+5)}; \quad \frac{x+9}{(x-5)(x+2)} - \frac{1}{x+2} - \frac{x+15}{(x-5)(x+5)} = 0; \\ \frac{x+9 \frac{x+5}{x+2}}{(x-5)(x+2)} - \frac{1 \frac{(x-5)(x+5)}{x+2}}{x+2} - \frac{x+15 \frac{x+2}{(x-5)(x+5)}}{(x-5)(x+5)} &= 0; \quad \frac{(x+9)(x+5) - (x-5)(x+5) - (x+15)(x+2)}{(x-5)(x+2)(x+5)} = 0; \\ \frac{x^2+14x+45 - x^2+25 - x^2-17x-30}{(x-5)(x+2)(x+5)} &= 0; \quad \frac{-x^2-3x+40}{(x-5)(x+2)(x+5)} = 0; \quad \begin{cases} x^2+3x-40=0, \\ x \neq 5, \\ x \neq -5, \\ x \neq -2; \end{cases} \quad \begin{cases} x=-8, \\ x=5; \\ x \neq 5, \\ x \neq -5, \\ x \neq -2; \end{cases} \quad x=-8. \end{aligned}$$

Ответ: 3.

A7. Воспользуемся формулой $S = pr$, где S — площадь треугольника, p — его полупериметр, а r — радиус вписанной в этот треугольник окружности. Тогда $p = \frac{S}{r} = \frac{108}{4} = 27$, т. е. периметр треугольника равен $27 \cdot 2 = 54$.

Ответ: 2.

$$\text{A8. } \begin{cases} 2(x-1)-3(x-4) > x+5, \\ \frac{3x-4}{x^2+4x+4} \geq 0; \end{cases} \begin{cases} 2x-2-3x+12 > x+5, \\ \frac{3x-4}{(x+2)^2} \geq 0; \end{cases} \begin{cases} -2x > -5, \\ \frac{3x-4}{(x+2)^2} \geq 0; \end{cases} \begin{cases} x < 2,5, \\ \frac{3x-4}{(x+2)^2} \geq 0. \end{cases}$$



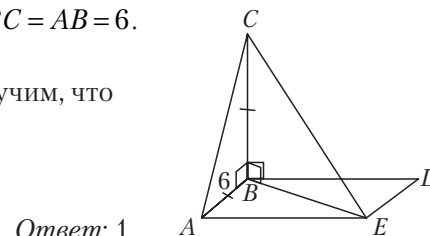
Ответ: 3.

A9. Так как треугольник ABC — прямоугольный и равнобедренный, то $BC = AB = 6$.

В квадрате $ABDE$ найдем диагональ $BE = 6\sqrt{2}$.

Тогда по теореме Пифагора в прямоугольном треугольнике CBE получим, что

$$CE = \sqrt{CB^2 + BE^2} = \sqrt{36 + 72} = 6\sqrt{3}.$$



Ответ: 1.

Часть В

B1. Рассмотрим арифметическую прогрессию, в которой $a_1 = 1$; $d = 1$.

Воспользуемся формулой суммы n первых членов арифметической прогрессии $S_n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n$

и получим $\frac{2+1 \cdot (n-1)}{2} \cdot n \leq 210$; $n^2 + n - 420 \leq 0$; $n \in [-21; 20]$.

Таким образом, наибольшее возможное число последовательных натуральных чисел, удовлетворяющих условию задачи, равно 20.

Ответ: 20.

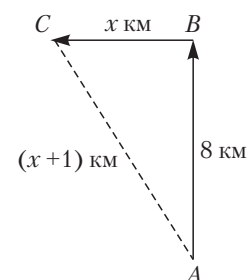
$$\text{B2. } \sqrt{7-2\sqrt{6}} - \sqrt{22+8\sqrt{6}} = \sqrt{(1-\sqrt{6})^2} - \sqrt{(4+\sqrt{6})^2} = |1-\sqrt{6}| - |4+\sqrt{6}| = -(1-\sqrt{6}) - (4+\sqrt{6}) = -1+\sqrt{6}-4-\sqrt{6} = -5.$$

Ответ: -5.

B3. Пусть $BC = x$, тогда $AC = x + 1$. По теореме Пифагора из прямоугольного треугольника ABC получим:

$$(x+1)^2 = x^2 + 8^2; x^2 + 2x + 1 = x^2 + 64; 2x = 63; x = 31,5.$$

То есть $AC = 31,5 + 1 = 32,5$ км = 32 500 м.



Ответ: 32 500.

$$\text{B4. } \left| \sin\left(x + \frac{\pi}{15}\right) - \frac{1}{2} \right| = 1; \begin{cases} \sin\left(x + \frac{\pi}{15}\right) - \frac{1}{2} = 1, \\ \sin\left(x + \frac{\pi}{15}\right) - \frac{1}{2} = -1; \end{cases} \begin{cases} \sin\left(x + \frac{\pi}{15}\right) = \frac{3}{2} \notin [-1; 1], \\ \sin\left(x + \frac{\pi}{15}\right) = -\frac{1}{2}. \end{cases}$$

Решим уравнение: $\sin\left(x + \frac{\pi}{15}\right) = -\frac{1}{2}$; $x + \frac{\pi}{15} = (-1)^{n+1} \frac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$; $x = -\frac{\pi}{15} + (-1)^{n+1} \frac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$;

$$x = -12^\circ + (-1)^{n+1} \cdot 30^\circ + 180^\circ n, n \in \mathbf{Z}.$$

При $n = 0$ получим наибольший отрицательный корень уравнения, равный -42° .

Ответ: -42 .

B5. Область определения данной функции совпадает с множеством решений системы неравенств:

$$\begin{cases} 2x^2 - 5x - 3 \geq 0, \\ x - 2 + |x - 2| \neq 0; \end{cases} \begin{cases} 2(x-3)(x+0,5) \geq 0, \\ |x-2| \neq -x+2. \end{cases}$$

Заметим, что равенство $|x-2|=-x+2$ выполняется при $x-2\leq 0$. То есть неравенство $|x-2|\neq -x+2$ равносильно неравенству $x-2>0$ или $x>2$. Тогда система принимает вид
$$\begin{cases} x\in(-\infty; -0,5]\cup[3; +\infty), \\ x\in(2; +\infty); \end{cases} \quad x\in[3; +\infty).$$

Число 3 является наименьшим целым числом, принадлежащим области определения данной функции.

Ответ: 3.

В6. Запишем уравнение в виде $(x-y)(x+y)=1\cdot 3\cdot 23$ и рассмотрим возможные варианты значений выражений $(x-y)$ и $(x+y)$. Так как требуется найти положительные решения уравнения, то $(x-y)<(x+y)$, тогда

$$\begin{aligned} &\begin{cases} x-y=1, \\ x+y=69; \end{cases} & \begin{cases} x-y=3, \\ x+y=23; \end{cases} \\ &\begin{cases} 2x=70, \\ x+y=69; \end{cases} & \text{или} & \begin{cases} 2x=26, \\ x+y=23; \end{cases} \\ &\begin{cases} x=35, \\ y=34 \end{cases} & & \begin{cases} x=13, \\ y=10. \end{cases} \end{aligned}$$

Таким образом, пары чисел $(35; 34)$ и $(13; 10)$ являются положительными целочисленными решениями данного уравнения, т. е. уравнение имеет два решения, удовлетворяющих условию задачи.

Ответ: 2.

ТЕСТ 8

Часть А

A1. Верным является утверждение под номером 3.

Ответ: 3.

$$\begin{aligned} \text{A2. } \left(7,42 \cdot \frac{5}{9} - (-11,48) : 1\frac{4}{5} \right) : 0,35 &= \frac{7,42 \cdot \frac{5}{9} - (-11,48) : 1\frac{4}{5}}{0,35} = \frac{7,42 \cdot \frac{5}{9} - (-11,48) : \frac{9}{5}}{0,35} = \frac{7,42 \cdot \frac{5}{9} + 11,48 \cdot \frac{5}{9}}{0,35} = \\ &= \frac{\frac{5}{9} \cdot (7,42 + 11,48)}{0,35} = \frac{\frac{5}{9} \cdot 18,9}{0,35} = \frac{5 \cdot 2,1}{0,35} = \frac{5 \cdot 210}{35} = 30. \end{aligned}$$

Ответ: 5.

A3. Количество диагоналей выпуклого n -угольника можно вычислить по формуле $\frac{n(n-3)}{2}$. Так как многоугольник содержит 65 диагоналей, то $\frac{n(n-3)}{2} = 65$. То есть $n(n-3) = 130$; $n^2 - 3n - 130 = 0$; $n_1 = 13$; $n_2 = -10$. Таким образом, количество сторон многоугольника равно 13.

Ответ: 2.

A4. Пусть x — первое число, тогда:

$(x+3)$ — второе число;

$(x+3)+8 = x+11$ — третье число;

$(x+11)+6 = x+17$ — четвертое число.

Так как отношения второго числа к первому и четвертого к третьему равны, то $\frac{x+3}{x} = \frac{x+17}{x+11}$;

$$(x+3)(x+11) = x(x+17); \quad x \neq 0; \quad x \neq -11; \quad x^2 + 14x + 33 = x^2 + 17x; \quad 3x = 33; \quad x = 11.$$

Ответ: 4.

A5. $(5x + \operatorname{tg} 45^\circ)(5x - \operatorname{ctg} 225^\circ) = \sin 0^\circ$.

Так как $\operatorname{tg} 45^\circ = 1$; $\operatorname{ctg} 225^\circ = \operatorname{ctg}(180^\circ + 45^\circ) = \operatorname{ctg} 45^\circ = 1$; $\sin 0^\circ = 0$, то уравнение принимает вид

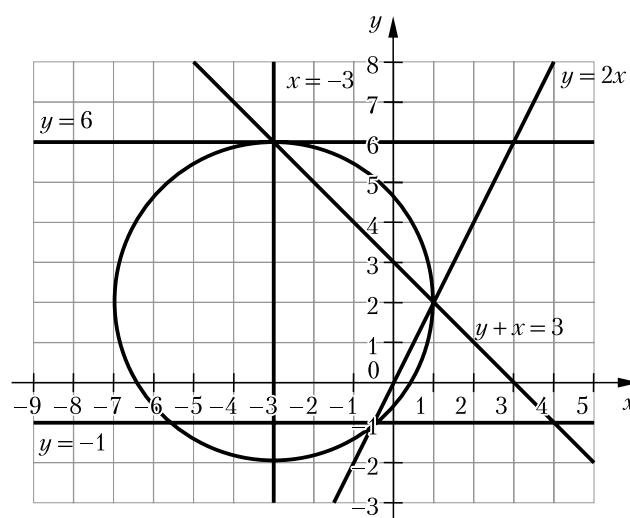
$$(5x+1)(5x-1)=0; \quad \begin{cases} 5x+1=0, & \begin{cases} x=-0,2, \\ 5x-1=0; & \begin{cases} x=0,2. \end{cases} \end{cases} \end{cases}$$

Ответ: 3.

A6. Построим окружность, заданную уравнением $(x+3)^2 + (y-2)^2 = 16$, и прямые $y=2x$; $x=-3$; $y=6$; $y+x=3$; $y=-1$.

С помощью построенных графиков убеждаемся, что прямая $y=6$ является касательной для окружности с центром в точке $(-3; 2)$ и радиусом 4.

Ответ: 3.



A7. 1) Разложим на множители квадратный трехчлен $3a^2 + 5a + 2$.

$$D = 5^2 - 4 \cdot 3 \cdot 2 = 25 - 24 = 1 > 0; \quad a_{1,2} = \frac{-5 \pm 1}{2 \cdot 3}; \quad a_1 = -1; \quad a_2 = -\frac{2}{3}.$$

$$\text{Тогда } 3a^2 + 5a + 2 = 3(a+1)\left(a + \frac{2}{3}\right) = (a+1)(3a+2).$$

2) Разложим на множители знаменатель дроби: $6ab - 3a + 4b - 2 = 3a(2b-1) + 2(2b-1) = (2b-1)(3a+2)$.

$$3) \text{ Сократим дробь: } \frac{3a^2 + 5a + 2}{6ab - 3a + 4b - 2} = \frac{(a+1)(3a+2)}{(2b-1)(3a+2)} = \frac{a+1}{2b-1}.$$

Ответ: 2.

A8. Так как нечетная функция $y = f(x)$ имеет нечетное количество нулей, то ее график проходит через точку с координатами $(0; 0)$. То есть $x = 0$ является одним из нулей данной функции. Поскольку нули нечетной функции симметричны относительно начала координат и $f(2) = f(-5) = f(13) = 0$, то $x = -2$; $x = 5$; $x = -13$ также являются нулями данной функции. Найдем среднее арифметическое чисел 0 ; -2 ; 5 и -13 :

$$\frac{0 - 2 + 5 - 13}{4} = -2,5.$$

Ответ: 1.

A9. Воспользуемся формулой $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$ и решим систему: $\begin{cases} a_1 + a_4 = 7, \\ a_2 + a_3 = 3; \end{cases} \begin{cases} a_1 + a_1 \cdot q^3 = 7, \\ a_1 \cdot q + a_1 \cdot q^2 = 3; \end{cases} \begin{cases} a_1(1+q^3) = 7, \\ a_1(q+q^2) = 3. \end{cases}$

$$\text{Разделим первое уравнение системы на второе и получим: } \frac{1+q^3}{q+q^2} = \frac{7}{3}; \quad \frac{(1+q)(1-q+q^2)}{q(1+q)} = \frac{7}{3}; \quad \frac{1-q+q^2}{q} = \frac{7}{3};$$

$$3q^2 - 3q + 3 = 7q; \quad 3q^2 - 10q + 3 = 0; \quad q_1 = 3; \quad q_2 = \frac{1}{3}.$$

$$\text{Так как прогрессия возрастает, то } q = 3. \text{ Тогда } a_1 = \frac{3}{q+q^2} = \frac{3}{3+3^2} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4} = 0,25.$$

Ответ: 5.

Часть В

B1. Если $\text{НОК}(a; b) = b$, то число a является делителем числа b . Так как $\text{НОК}(n; 24) = 24$, число n является делителем числа 24. Найдем все четные делители числа 24: 2; 4; 6; 8; 12; 24. Их сумма равна: $2 + 4 + 6 + 8 + 12 + 24 = 56$.

Ответ: 56.

B2. Составим неравенство: $\frac{2x-3}{4-x} \geq \frac{1}{x}$.

$$\frac{2x-3}{4-x} - \frac{1}{x} \geq 0; \quad \frac{(2x-3)x - (4-x)}{(4-x)x} \geq 0; \quad \frac{2x^2 - 3x - 4 + x}{(4-x)x} \geq 0; \quad \frac{2x^2 - 2x - 4}{(4-x)x} \geq 0; \quad \frac{x^2 - x - 2}{(4-x)x} \geq 0;$$

$$\frac{(x-2)(x+1)}{(4-x)x} \geq 0. \quad \begin{array}{c} - \quad \nearrow \quad \searrow \quad - \quad \nearrow \quad \searrow \quad - \\ -1 \quad 0 \quad 2 \quad 4 \end{array} \rightarrow x \in [-1; 0) \cup [2; 4).$$

Найдем сумму целых решений неравенства: $-1 + 2 + 3 = 4$.

Ответ: 4.

$$\begin{aligned} \text{B3. } & (\sqrt{2} - \sqrt{6})\sqrt{3 + \sqrt{5 - \sqrt{13 + \sqrt{48}}}} = (\sqrt{2} - \sqrt{6})\sqrt{3 + \sqrt{5 - \sqrt{13 + 4\sqrt{3}}}} = (\sqrt{2} - \sqrt{6})\sqrt{3 + \sqrt{5 - \sqrt{13 + 2 \cdot 1 \cdot 2\sqrt{3}}}} = \\ & = (\sqrt{2} - \sqrt{6})\sqrt{3 + \sqrt{5 - \sqrt{(1 + 2\sqrt{3})^2}}} = (\sqrt{2} - \sqrt{6})\sqrt{3 + \sqrt{5 - |1 + 2\sqrt{3}|}} = (\sqrt{2} - \sqrt{6})\sqrt{3 + \sqrt{5 - 1 - 2\sqrt{3}}} = \\ & = (\sqrt{2} - \sqrt{6})\sqrt{3 + \sqrt{4 - 2\sqrt{3}}} = (\sqrt{2} - \sqrt{6})\sqrt{3 + \sqrt{(1 - \sqrt{3})^2}} = (\sqrt{2} - \sqrt{6})\sqrt{3 + |1 - \sqrt{3}|} = (\sqrt{2} - \sqrt{6})\sqrt{3 + \sqrt{3} - 1} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (\sqrt{2} - \sqrt{6})\sqrt{2 + \sqrt{3}} = (\sqrt{2} - \sqrt{6})\sqrt{\frac{4 + 2\sqrt{3}}{2}} = (\sqrt{2} - \sqrt{6})\sqrt{\frac{(1 + \sqrt{3})^2}{2}} = (\sqrt{2} - \sqrt{6})\frac{1 + \sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}(1 - \sqrt{3})\frac{1 + \sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \\
&= (1 - \sqrt{3})(1 + \sqrt{3}) = 1 - (\sqrt{3})^2 = 1 - 3 = -2.
\end{aligned}$$

Ответ: -2.

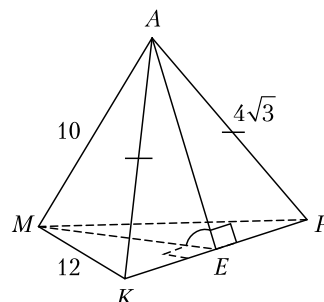
В4. 1) В прямоугольном треугольнике APE : $AP = 4\sqrt{3}$; $PE = \frac{KP}{2} = 6$, тогда по теореме Пифагора $AE = \sqrt{AP^2 - PE^2} = \sqrt{(4\sqrt{3})^2 - 6^2} = \sqrt{48 - 36} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$.

2) Так как отрезок ME является высотой равностороннего треугольника MKP , то $ME = \frac{MK \sqrt{3}}{2} = \frac{12\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}$.

3) По теореме косинусов из треугольника AME найдем:

$$\cos \angle MEA = \frac{ME^2 + AE^2 - AM^2}{2 \cdot ME \cdot AE} = \frac{(6\sqrt{3})^2 + (2\sqrt{3})^2 - 10^2}{2 \cdot 6\sqrt{3} \cdot 2\sqrt{3}} = \frac{108 + 12 - 100}{72} = \frac{20}{72} = \frac{5}{18}.$$

Тогда $18 \cdot \cos \angle MEA = 18 \cdot \frac{5}{18} = 5$.



Ответ: 5.

В5. $\begin{cases} |x-2| + |y-5| = 1, \\ y - |x-2| = 5. \end{cases}$ Сложим первое и второе уравнения системы и получим $\begin{cases} y + |y-5| = 6, \\ y - |x-2| = 5. \end{cases}$

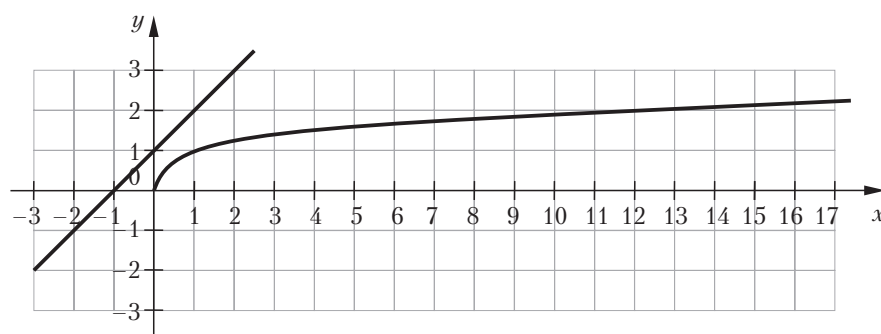
Решим первое уравнение системы: $y + |y-5| = 6$; $|y-5| = 6 - y$; $\begin{cases} y - 5 = 6 - y, \\ y - 5 = -6 + y, \\ 6 - y \geq 0; \end{cases} \begin{cases} 2y = 11, \\ 0y = -1; \\ y \leq 6; \end{cases} \begin{cases} y = 5,5, \\ y \leq 6; \end{cases} y = 5,5.$

Тогда $|x-2| = 5,5 - 5$; $|x-2| = 0,5$; $\begin{cases} x - 2 = 0,5, \\ x - 2 = -0,5; \end{cases} \begin{cases} x = 2,5, \\ x = 1,5. \end{cases}$

Таким образом, пары чисел $(2,5; 5,5)$ и $(1,5; 5,5)$ являются решениями исходной системы уравнений. Найдем наибольшее значение выражения: $x_0 + y_0 = 2,5 + 5,5 = 8$.

Ответ: 8.

В6. $\sqrt{x} - (x+3)\sqrt[4]{x} + 2x + 2 = 0.$



Рассмотрим данное уравнение как квадратное относительно $\sqrt[4]{x}$. Тогда $D = (x+3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (2x+2) =$

$$= x^2 + 6x + 9 - 8x - 8 = x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2 \quad \text{и} \quad \begin{cases} \sqrt[4]{x} = \frac{x+3+x-1}{2}, \\ \sqrt[4]{x} = \frac{x+3-x+1}{2}; \end{cases} \begin{cases} \sqrt[4]{x} = x+1, \\ \sqrt[4]{x} = 2; \end{cases} \begin{cases} \sqrt[4]{x} = x+1, \\ x = 16. \end{cases} \quad \text{Построим графики}$$

функций $y = \sqrt[4]{x}$ и $y = x+1$ и убедимся, что первое уравнение совокупности не имеет корней.

Таким образом, исходное уравнение имеет один корень.

Ответ: 1.

ТЕСТ 9

Часть А

A1. Гипербола является графиком обратной пропорциональности, т. е. функции вида $y = \frac{k}{x}$ ($k \neq 0$). В данном случае гипербола является графиком функции $y = -\frac{3}{x}$.

Ответ: 1.

A2. Так как в любом прямоугольном треугольнике гипотенуза больше любого из катетов, то отношением катета к гипотенузе не может быть число, большее единицы. Из предложенных вариантов ответов только $\sqrt{1,001} > 1$.

Ответ: 5.

A3. Натуральное число называется простым, если оно имеет только два натуральных делителя — единицу и само себя.

Число 2 671 335 делится на 5 (так как оканчивается цифрой 5).

Число 384 291 делится на 3 (так как сумма цифр этого числа $3 + 8 + 4 + 2 + 9 + 1 = 27$ кратна трем).

Число 327 327 делится на 327.

Число 55 551 делится на 3 ($5 + 5 + 5 + 5 + 1 = 21$ — кратно трем). Так как известно, что среди предложенных чисел одно является простым, то это число 2 029.

Ответ: 3.

A4. 1) Функция $y = -\frac{6}{x}$ возрастает на промежутках $(-\infty; 0)$ и $(0; +\infty)$.

2) Функция $y = -7 + x$ возрастает на промежутке $(-\infty; +\infty)$.

3) Функция $y = x^3$ возрастает на промежутке $(-\infty; +\infty)$.

4) Функция $y = \sqrt{x}$ возрастает на промежутке $[0; +\infty)$.

5) Функция $y = -x^2 + 5$ возрастает на промежутке $(-\infty; 0]$ и убывает на промежутке $[0; +\infty)$, а значит, и на промежутке $[1; 10]$.

Ответ: 5.

A5. Сечением куба плоскостью не может быть семиугольник, так как у куба шесть граней.

Ответ: 4.

A6. 1) С помощью основного тригонометрического тождества найдем $\cos 2\alpha$: $\cos^2 2\alpha + \sin^2 2\alpha = 1$; $\cos^2 2\alpha = 1 - \sin^2 2\alpha$; $\cos^2 2\alpha = 1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2$; $\cos^2 2\alpha = 1 - \frac{9}{25}$; $\cos^2 2\alpha = \frac{16}{25}$. Тогда $\cos 2\alpha = \pm \frac{4}{5}$. Так как $\frac{\pi}{4} < \alpha < \frac{\pi}{2}$, то $\frac{\pi}{2} < 2\alpha < \pi$, т. е. 2α является углом второй четверти и $\cos 2\alpha = -\frac{4}{5}$.

2) Так как $\cos 2\alpha = 2\cos^2 \alpha - 1$, то $\cos^2 \alpha = \frac{\cos 2\alpha + 1}{2}$, т. е. $\cos^2 \alpha = \frac{-\frac{4}{5} + 1}{2} = \frac{1}{10}$.

Так как $\frac{\pi}{4} < \alpha < \frac{\pi}{2}$, то $\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{10}}$.

Ответ: 1.

A7. 1) $D = [-6; 10]$ — верно.

2) $E = [-4,5; 4]$ — верно.

3) Наименьшее значение $y = -4,1$ функция принимает при $x = 0$ — неверно, так как наименьшее значение $y = -4,5$ функция принимает при $x = 0,8$.

4) Нули функции: $x = -4,5; -2; 2,5; 7$ — верно.

5) $y > 0$ при $x \in (-4; 4) \cup (-4,5; 1,5)$ — неверно, так как $y > 0$ при $x \in (-4,5; -2) \cup (2,5; 7)$.

6) $y < 0$ при $x \in [-6; -4,5) \cup (-2; 2,5) \cup (7; 10]$ — верно.

7) Функция возрастает на промежутках: $[-6; -3]; [0,8; 5]$ — верно.

8) Функция убывает на промежутках: $[-3; 0, 8]; [6; 10]$ — верно.

9) График функции пересекает ось ординат в точке $(7; 0)$ — неверно, так как график функции пересекает ось ординат в точке $(0; -4, 1)$.

Ответ: 4.

A8. $\left(\frac{x}{x-y+6} - \frac{6}{x+y+6}\right) : \frac{x^2+y^2+2xy-36}{x^2+12x-y^2+36} + \frac{y}{x+y+6}.$

1) $\frac{x}{x-y+6} - \frac{6}{x+y+6} = \frac{x(x+y+6)-6(x-y+6)}{(x-y+6)(x+y+6)} = \frac{x^2+xy+6x-6x+6y-36}{(x-y+6)(x+y+6)} = \frac{x^2+xy+6y-36}{(x-y+6)(x+y+6)}.$

2) $\frac{x^2+y^2+2xy-36}{x^2+12x-y^2+36} = \frac{(x+y)^2-36}{(x+6)^2-y^2} = \frac{(x+y-6)(x+y+6)}{(x+6-y)(x+6+y)} = \frac{x+y-6}{x+6-y}.$

3) $\frac{x^2+xy+6y-36}{(x-y+6)(x+y+6)} : \frac{x+y-6}{x+6-y} = \frac{(x^2+xy+6y-36)(x+6-y)}{(x-y+6)(x+y+6)(x+y-6)} = \frac{x^2+xy+6y-36}{(x+y+6)(x+y-6)} =$
 $= \frac{(x^2-36)+(xy+6y)}{(x+y+6)(x+y-6)} = \frac{(x-6)(x+6)+y(x+6)}{(x+y+6)(x+y-6)} = \frac{(x+6)(x-6+y)}{(x+y+6)(x+y-6)} = \frac{x+6}{x+y+6}.$

4) $\frac{x+6}{x+y+6} + \frac{y}{x+y+6} = \frac{x+6+y}{x+y+6} = 1.$

Ответ: 1.

A9. Область определения данной функции совпадает с множеством решений системы неравенств

$$\begin{cases} 20-x-x^2 \geq 0, & \begin{cases} x^2+x-20 \leq 0, & \begin{cases} (x+5)(x-4) \leq 0, & \begin{cases} x \in [-5; 4], \\ x \in [-5; 2]. \end{cases} \end{cases} \\ 14-5x-x^2 > 0; & \begin{cases} x^2+5x-14 < 0; & \begin{cases} (x+7)(x-2) < 0; & \begin{cases} x \in (-7; 2); \end{cases} \end{cases} \end{cases} \end{cases}$$

Ответ: 4.

Часть В

B1. $\begin{cases} \sqrt{(2x-5)^2} = 5-2x, \\ \sqrt{(x+5)^2} = 5+x. \end{cases}$ Воспользуемся тождеством $\sqrt{a^2} = |a|$ и получим $\begin{cases} |2x-5| = 5-2x, \\ |x+5| = 5+x. \end{cases}$

Так как уравнение вида $|a| = -a$ равносильно неравенству $a \leq 0$, а уравнение вида $|a| = a$ равносильно неравенству $a \geq 0$, то перейдем к системе неравенств $\begin{cases} 2x-5 \leq 0, & \begin{cases} x \leq 2,5, \\ 5+x \geq 0; & \begin{cases} x \geq -5; \end{cases} \end{cases} \\ x \in [-5; 2,5]. \end{cases}$

Найдем сумму целых решений системы: $-5-4-3-2-1+0+1+2=-12.$

Ответ: -12.

B2. $8x - \sin 20^\circ \cos 70^\circ + \cos 160^\circ \sin 70^\circ = 7.$ Так как $\cos 160^\circ = \cos(180^\circ - 20^\circ) = -\cos 20^\circ$, то исходное уравнение принимает вид $8x - \sin 20^\circ \cos 70^\circ - \cos 20^\circ \sin 70^\circ = 7;$ $8x - (\sin 20^\circ \cos 70^\circ + \cos 20^\circ \sin 70^\circ) = 7;$

$8x - \sin(20^\circ + 70^\circ) = 7; 8x - \sin 90^\circ = 7; 8x - 1 = 7; 8x = 8; x = 1.$

Ответ: 1.

B3. 1) Так как $\sin \angle ABC = \frac{AC}{2R}$ и $AC : R = 6 : 5$, то $\sin \angle ABC = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}.$

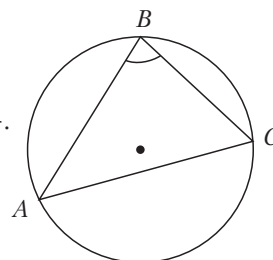
2) Так как $\cos^2 \angle ABC + \sin^2 \angle ABC = 1$, то $\cos^2 \angle ABC = 1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{16}{25}; \cos \angle ABC = \pm \frac{4}{5}.$

Так как AC — меньшая сторона треугольника, то $\angle ABC$ — острый и $\cos \angle ABC = \frac{4}{5}.$

3) С помощью теоремы косинусов найдем сторону AC :

$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2 \cdot AB \cdot BC \cdot \cos \angle ABC; AC^2 = 20^2 + 21^2 - 2 \cdot 20 \cdot 21 \cdot \frac{4}{5} = 400 + 441 - 672 = 169; AC = 13.$

Ответ: 13.



$$\begin{aligned}
 \text{B4. } & \frac{(\sqrt{19} + \sqrt{2})(\sqrt{38} + \sqrt{57} - \sqrt{6} - 2)}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} = \frac{(\sqrt{19} + \sqrt{2})(\sqrt{2 \cdot 19} + \sqrt{3 \cdot 19} - \sqrt{3 \cdot 2} - (\sqrt{2})^2)}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} = \\
 & = \frac{(\sqrt{19} + \sqrt{2})(\sqrt{19}(\sqrt{2} + \sqrt{3}) - \sqrt{2}(\sqrt{3} + \sqrt{2}))}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} = \frac{(\sqrt{19} + \sqrt{2})(\sqrt{2} + \sqrt{3})(\sqrt{19} - \sqrt{2})}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} = \\
 & = (\sqrt{19} + \sqrt{2})(\sqrt{19} - \sqrt{2}) = (\sqrt{19})^2 - (\sqrt{2})^2 = 19 - 2 = 17.
 \end{aligned}$$

Ответ: 17.

$$\begin{aligned}
 \text{B5. } & \frac{3x^2 - 13x + 5}{x^2 - 1} = \frac{4x^2 - 13x + 1}{2x^2 - 5}. \text{ Вычтем единицу из обеих частей уравнения:} \\
 & \frac{3x^2 - 13x + 5}{x^2 - 1} - 1 = \frac{4x^2 - 13x + 1}{2x^2 - 5} - 1; \quad \frac{3x^2 - 13x + 5 - x^2 + 1}{x^2 - 1} = \frac{4x^2 - 13x + 1 - 2x^2 + 5}{2x^2 - 5}; \\
 & \frac{2x^2 - 13x + 6}{x^2 - 1} = \frac{2x^2 - 13x + 6}{2x^2 - 5}; \quad \frac{2x^2 - 13x + 6}{x^2 - 1} - \frac{2x^2 - 13x + 6}{2x^2 - 5} = 0; \quad (2x^2 - 13x + 6) \left(\frac{1}{x^2 - 1} - \frac{1}{2x^2 - 5} \right) = 0; \\
 & (2x^2 - 13x + 6) \cdot \frac{2x^2 - 5 - x^2 + 1}{(x^2 - 1)(2x^2 - 5)} = 0; \quad (2x^2 - 13x + 6) \cdot \frac{x^2 - 4}{(x^2 - 1)(2x^2 - 5)} = 0. \\
 & \left\{ \begin{array}{l} 2x^2 - 13x + 6 = 0, \\ x^2 - 4 = 0; \\ x^2 - 1 \neq 0, \\ 2x^2 - 5 \neq 0; \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} x = 6, \\ x = 0,5, \\ x = 2, \\ x = -2; \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} x = 6, \\ x = 0,5, \\ x = 2, \\ x = -2. \end{array} \right.
 \end{aligned}$$

Найдем произведение корней уравнения: $6 \cdot 0,5 \cdot 2 \cdot (-2) = -12$.

Ответ: -12.

B6. Пусть x человек — первоначальное количество жителей города. Так как население города увеличивается ежегодно на $\frac{1}{50}$ наличного числа жителей, или на 2 %, то после первого года в городе будет $(x \cdot 1,02)$ человек, а после второго года $(x \cdot 1,02) \cdot 1,02 = x \cdot 1,02^2$ человек. То есть через n лет в городе будет жить $(x \cdot 1,02^n)$ человек. По условию задачи составим неравенство $x \cdot 1,02^n \geq x \cdot 1,1$. Тогда $1,02^n \geq 1,1$. Так как $1,02^4 \leq 1,1$, а $1,02^5 \geq 1,1$, то наименьшее количество лет, через которое население города увеличится не менее чем на 10 %, равно пяти.

Ответ: 5.

ТЕСТ 10

Часть А

A1. Так как остаток от деления всегда меньше делителя, то остатком от деления некоторого натурального числа на 37 не может быть число 39.

Ответ: 5.

A2. Наименьшее количество ребер имеет треугольная призма, изображенная на рисунке. У треугольной призмы 9 ребер.

Ответ: 5.

A3. Так как $5697 = 569 \cdot 10 + 7$, то данное число имеет 569 десятков.

Ответ: 4.

A4. Так как прямая a лежит в плоскости DD_1C_1 и прямая CC_1 лежит в плоскости DD_1C_1 , то прямые a и CC_1 пересекаются.

Ответ: 5.

A5. 1) Найдем периметр параллелограмма: $12 : 0,3 = 40$.

2) Так как периметр параллелограмма равен удвоенной сумме двух его смежных сторон, то $P_{ABCD} = 2(AB + BC)$. Тогда $40 = 2(12 + BC)$; $20 = 12 + BC$; $BC = 8$.

Ответ: 3.

A6. Данное выражение имеет смысл, если $2 - b > 0$. Тогда $b - 2 < 0$. Имеем:

$$(b-2) \sqrt[4]{\frac{1}{2-b}} = -(2-b) \sqrt[4]{\frac{1}{2-b}} = -\sqrt[4]{(2-b)^4 \cdot \frac{1}{2-b}} = -\sqrt[4]{(2-b)^3}.$$

Ответ: 3.

A7. Воспользуемся формулой разности квадратов двух выражений и получим:

$$\frac{24,3333^2 - 15,6667^2}{15,6667 - 24,3333} = \frac{(24,3333 - 15,6667)(24,3333 + 15,6667)}{15,6667 - 24,3333} = \frac{(24,3333 - 15,6667)(24,3333 + 15,6667)}{-(24,3333 - 15,6667)} = - (24,3333 + 15,6667) = -40.$$

Ответ: 1.

A8. $-5\pi \leq \frac{\pi}{2} + 2\pi x \leq 2\pi$.

Умножим все части неравенства на два: $-10\pi \leq \pi + 4\pi x \leq 4\pi$.

Вычтем π : $-11\pi \leq 4\pi x \leq 3\pi$.

Разделим на 4π : $-\frac{11}{4} \leq x \leq \frac{3}{4}$; $-2\frac{3}{4} \leq x \leq \frac{3}{4}$.

Целыми решениями данного неравенства являются числа -2 ; -1 ; 0 . Их сумма равна -3 .

Ответ: 4.

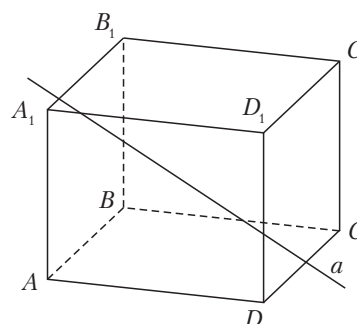
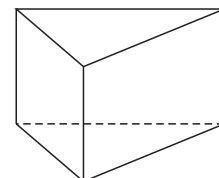
A9. $x \operatorname{ctg}^2\left(-\frac{\pi}{6}\right) - 18 \sin \frac{7\pi}{6} = \sin 2\pi$.

Найдем значения выражений:

$$\operatorname{ctg}^2\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \operatorname{ctg}^2\left(\frac{\pi}{6}\right) = (\sqrt{3})^2 = 3; \quad \sin \frac{7\pi}{6} = \sin\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) = -\sin \frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2}; \quad \sin 2\pi = 0.$$

Тогда уравнение принимает вид $3x - 18 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = 0$; $3x + 9 = 0$; $x = -3$.

Ответ: 2.



В1. Так как $f(2)=5$ и период функции $y=f(x)$ равен 3, то $f(-1)=f(2+(-3))=f(2)=5$;

$$f(8)=f(2+2\cdot(3))=f(2)=5 \text{ и } f(-4)=f(2+2\cdot(-3))=f(2)=5.$$

Тогда значение выражения $f(-1)+2f(8)-3f(-4)=5+2\cdot5-3\cdot5=0$.

Ответ: 0.

В2. Пусть $\sqrt{x^2+3x-6}=t$, тогда $(\sqrt{x^2+3x-6})^2=t^2$, т. е. $x^2+3x-6=t^2$. Тогда $x^2+3x=t^2+6$, и исходное уравнение принимает вид $t^2+6-18+4t=0$; $t^2+4t-12=0$; $t_1=-6$; $t_2=2$. Так как $\sqrt{x^2+3x-6}=t$, то $t \geq 0$, значит, $t=2$.

Тогда $\sqrt{x^2+3x-6}=2$; $x^2+3x-6=4$; $x^2+3x-10=0$.

Полученное уравнение имеет корни ($D>0$), произведение которых равно -10 .

Ответ: -10 .

В3. Рассмотрим первое уравнение системы. Пусть $t=\frac{x+y}{x-y}$, тогда уравнение имеет вид $t+\frac{1}{t}=\frac{13}{6}$;

$$6t^2-13t+6=0; \begin{cases} t=\frac{2}{3}, \\ t=\frac{3}{2}. \end{cases} \text{ Тогда } \begin{cases} \frac{x+y}{x-y}=\frac{2}{3}, \\ \frac{x+y}{x-y}=\frac{3}{2}; \end{cases} \begin{cases} \begin{cases} 3x+3y=2x-2y, \\ 2x+2y=3x-3y; \end{cases} \\ x \neq y; \end{cases} \begin{cases} \begin{cases} x=-5y, \\ x=5y; \end{cases} \\ x \neq y; \end{cases} \begin{cases} x=-5y, \\ x=5y. \end{cases}$$

При $x=-5y$ второе уравнение системы принимает вид $-5y \cdot y=5$; $y^2=-1$. Полученное уравнение не имеет корней.

При $x=5y$ получим $5y \cdot y=5$; $y^2=1$; $y=\pm 1$.

Тогда решениями системы являются пары чисел $(5; 1)$ и $(-5; -1)$, и значение искомого выражения равно $|x_0+y_0|=5+1=6$.

Ответ: 6.

В4. 1) Рассмотрим прямоугольный треугольник MCB с углом CBM , равным 15° , и докажем, что если в прямоугольном треугольнике угол равен 15° , то высота этого треугольника, проведенная к гипотенузе, равна $\frac{1}{4}$ гипотенузы.

2) В прямоугольном треугольнике MCB проведем медиану CK и высоту CH . Тогда $CK=\frac{1}{2}MB$ (медиана, проведенная из вершины прямого угла, равна половине гипотенузы), значит, треугольник CBK — равнобедренный

$$\text{и } \angle CKB=180^\circ-(\angle KBC+\angle KCB)=180^\circ-(15^\circ+15^\circ)=150^\circ.$$

Тогда $\angle KCH=180^\circ-150^\circ=30^\circ$ и $CH=\frac{1}{2}CK$ (как катет, лежащий против угла в 30° в прямоугольном треугольнике CHK), но $CK=\frac{1}{2}MB$, значит, $CH=\frac{1}{2}CK=\frac{1}{4}MB$.

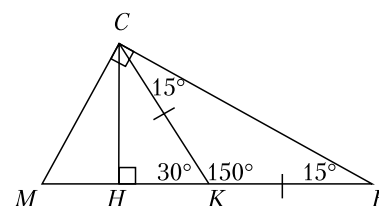
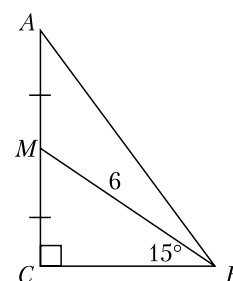
3) Воспользуемся доказанным утверждением и выразим площадь треугольника MCB через длину его гипотенузы MB :

$$S_{MCB}=\frac{1}{2}CH \cdot MB=\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4}MB \cdot MB=\frac{1}{8} \cdot MB^2.$$

4) Вернемся к данным задачи. С помощью доказанных утверждений найдем, что $S_{MCB}=\frac{1}{8} \cdot MB^2=\frac{1}{8} \cdot 6^2=\frac{9}{2}$,

а так как медиана MB делит треугольник ABC на два равновеликих треугольника, то $S_{ACB}=2 \cdot S_{MCB}=2 \cdot \frac{9}{2}=9$.

Ответ: 9.



B5. Пусть x ч — время, за которое можно приготовить сок, пользуясь первой соковыжималкой.

	Время приготовления сока одной соковыжималкой (ч)	Производительность	Время совместной работы (ч)	Объем выполненной работы
Первая	x	$\frac{1}{x}$	x	$\frac{1}{x} \cdot x = 1$
Вторая	$x+1$	$\frac{1}{x+1}$	x	$\frac{1}{x+1} \cdot x = \frac{x}{x+1}$
Третья	$x+4$	$\frac{1}{x+4}$	x	$\frac{1}{x+4} \cdot x = \frac{x}{x+4}$

Так как за x ч первая соковыжималка выполняет такой же объем работы, как первая и вторая соковыжималки вместе, то составим уравнение: $1 = \frac{x}{x+1} + \frac{x}{x+4}$; $1 = \frac{x(2x+5)}{(x+1)(x+4)}$; $x^2 + 5x + 4 = 2x^2 + 5x$; $x^2 = 4$; $x = \pm 2$.

По смыслу задачи $x = 2$.

Ответ: 2.

B6. Найдем область определения данной функции: $\begin{cases} x+7 \geq 0, \\ 11-x \geq 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x \geq -7, \\ x \leq 11; \end{cases} \quad x \in [-7; 11]$.

Так как $y > 0$ при $x \in [-7; 11]$, то наибольшее значение данной функции достигается тогда, когда достигает наибольшее значение квадрат этой функции:

$$y^2 = (\sqrt{x+7} + \sqrt{11-x})^2; \quad y^2 = (\sqrt{x+7})^2 + 2\sqrt{(x+7)(11-x)} + (\sqrt{11-x})^2;$$

$$y^2 = x+7 + 2\sqrt{-x^2 + 4x + 77} + 11-x.$$

Выделим полный квадрат в подкоренном выражении: $y^2 = 2\sqrt{-(x-2)^2 + 81} + 18$. Так как наибольшее значение подкоренного выражения равно 81 при $x = 2$, то наибольшее значение квадрата исходной функции равно $y^2 = 2\sqrt{81} + 18 = 2 \cdot 9 + 18 = 36$.

Тогда наибольшее значение функции $y = \sqrt{x+7} + \sqrt{11-x}$ равно $y_{\text{наиб}} = \sqrt{36} = 6$.

Ответ: 6.

ТЕСТ 11

Часть А

A1. Так как 1 % числа равен 0,78, то само число равно $100 \cdot 0,78 = 78$.

Ответ: 5.

A2. 1) $\frac{1}{3} \cdot 2 = \frac{2}{3}$.

2) $\frac{1}{3} - \frac{2}{3} = -\frac{1}{3}$.

3) $-\frac{1}{3} + 6,05 = -\frac{1}{3} + 6 \frac{1}{20} = -\frac{20}{60} + 6 \frac{3}{60} = -\frac{20}{60} + 5 \frac{63}{60} = 5 \frac{43}{60}$.

Ответ: 2.

A3. Дробь называется неправильной, если числитель этой дроби больше знаменателя или равен ему. Таким образом, дробь $\frac{6}{a}$ является неправильной при $a = 1; 2; 3; 4; 5; 6$. Искомая сумма равна $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21$.

Ответ: 4.

A4.
$$\begin{cases} \frac{x}{3} + \frac{y-4}{2} = \frac{y+2}{6}, \\ x-2 = \frac{2y-2}{3}. \end{cases}$$
 Умножим обе части первого уравнения системы на 6, а второго — на 3.

$$\begin{cases} 2x + 3(y-4) = y+2, \\ 3(x-2) = 2y-2; \end{cases} \begin{cases} 2x + 3y - 12 = y+2, \\ 3x - 6 = 2y-2; \end{cases} \begin{cases} 2x + 2y = 14, \\ 3x - 2y = 4. \end{cases}$$

Сложим первое и второе уравнения системы и получим:

$$\begin{cases} 5x = 18, \\ 3x - 2y = 4; \end{cases} \begin{cases} x = 3,6, \\ 3x - 2y = 4; \end{cases} \begin{cases} x = 3,6, \\ 3 \cdot 3,6 - 2y = 4; \end{cases} \begin{cases} x = 3,6, \\ 10,8 - 2y = 4; \end{cases} \begin{cases} x = 3,6, \\ 2y = 6,8; \end{cases} \begin{cases} x = 3,6, \\ y = 3,4. \end{cases}$$

То есть $x_0 = 3,6$; $y_0 = 3,4$, и искомое выражение имеет значение $x_0 - y_0 = 3,6 - 3,4 = 0,2$.

Ответ: 3.

A5.
$$\frac{7(m-n)^2}{(2n-2m)^2} = \frac{7(m-n)^2}{(2(n-m))^2} = \frac{7(m-n)^2}{4(n-m)^2} = \frac{7(m-n)^2}{4(m-n)^2} = \frac{7}{4} = 1,75.$$

Ответ: 1.

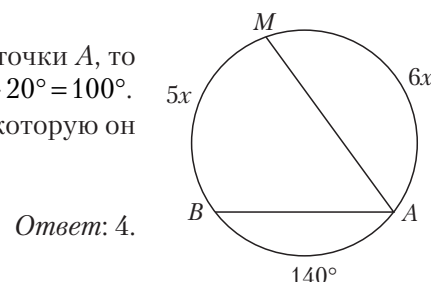
A6. Найдем объем прямоугольного параллелепипеда: $2 \cdot 4 \cdot 27 = 216$. Найдем ребро куба: $a^3 = 216$; $a^3 = 6^3$; $a = 6$.

Ответ: 1.

A7. 1) $\cup BMA = 360^\circ - \cup BA = 360^\circ - 140^\circ = 220^\circ$.

2) Так как дуга BMA точкой M делится в отношении $6 : 5$, считая от точки A , то $\cup MA = 6x$; $\cup BM = 5x$. Тогда $6x + 5x = 220^\circ$; $11x = 220^\circ$; $x = 20^\circ$ и $\cup BM = 5 \cdot 20^\circ = 100^\circ$.

3) Так как вписанный угол равен половине градусной меры дуги, на которую он опирается, то $\angle BAM = \frac{1}{2} \cup BM = \frac{1}{2} \cdot 100^\circ = 50^\circ$.



Ответ: 4.

A8. $(x^2 - 3x)^2 - 2(x^2 - 3x) - 8 > 0$.

Пусть $x^2 - 3x = t$, тогда неравенство принимает вид $t^2 - 2t - 8 > 0$. Разложим на множители квадратный трехчлен в левой части неравенства и получим $(t-4)(t+2) > 0$.

Так как $t = x^2 - 3x$, то $(x^2 - 3x - 4)(x^2 - 3x + 2) > 0$ или $(x-4)(x+1)(x-1)(x-2) > 0$. Решим полученное неравенство методом интервалов: $\frac{///}{-1} \frac{-}{1} \frac{///}{2} \frac{-}{4} \frac{///}{+}$ $x \in (-\infty; -1) \cup (1; 2) \cup (4; +\infty)$.

Ответ: 2.

A9. Если переменная y функционально зависит от переменной x , то *каждому* значению переменной x соответствует *единственное* значение переменной y .

1) $y^2 = x$ — очевидно, что при любом $x > 0$ $y = \pm\sqrt{x}$ (например при $x = 4$ $y = \pm 2$), т. е. данная зависимость не является функциональной;

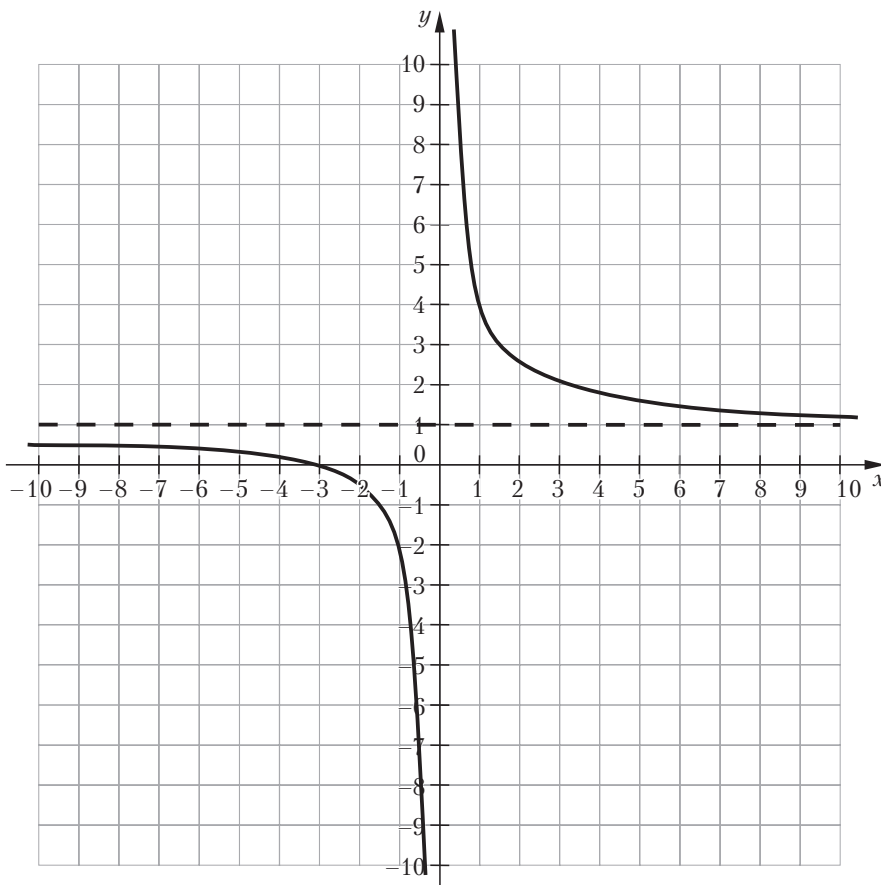
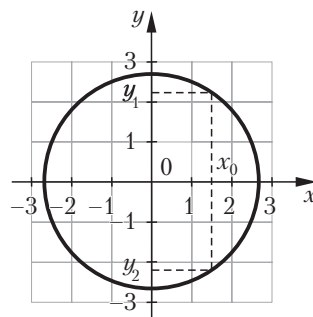
2) $|y| = x + 1$ — при любом $x > -1$ $y = \pm(x + 1)$ (например при $x = 5$ $y = \pm 6$), т. е. данная зависимость не является функциональной;

3) $y^4 = 5x + 6$ — при любом $x > -\frac{6}{5}$ $y = \pm\sqrt[4]{5x + 6}$ (например при $x = -1$ $y = \pm 1$), т. е. данная зависимость не является функциональной;

4) $x^2 + y^2 = 7$ — данное уравнение является уравнением окружности с центром в точке $(0; 0)$ и радиусом $\sqrt{7}$.

С помощью рисунка убедимся, что значению переменной $x = x_0$ соответствует два значения переменной y : y_1 и y_2 , т. е. данная зависимость не является функциональной;

5) $y - \frac{3}{x} = 1$; $y = \frac{3}{x} + 1$ — в данном случае каждому значению переменной x соответствует единственное значение переменной y , т. е. данная зависимость является функциональной и ее график изображен на рисунке.



Ответ: 5.

Часть B

B1. Парабола $y = (x + 5)^2 - 7$ получена смещением графика функции $y = x^2$ на пять единичных отрезков влево вдоль оси абсцисс и на семь единичных отрезков вниз вдоль оси ординат.

При $x = 2$ $y = (2 + 5)^2 - 7 = 49 - 7 = 42$. То есть прямая $x = 2$ пересекает параболу $y = (x + 5)^2 - 7$ в точке с ординатой 42.

Ответ: 42.

$$\begin{aligned} \text{В2. } & \sqrt{(\sqrt{3}-5)^2} - \frac{1}{\sqrt{7+4\sqrt{3}}} = \sqrt{(\sqrt{3}-5)^2} - \frac{1}{\sqrt{(2+\sqrt{3})^2}} = |\sqrt{3}-5| - \frac{1}{|2+\sqrt{3}|} = 5-\sqrt{3} - \frac{1}{2+\sqrt{3}} = \\ & = 5-\sqrt{3} - \frac{2-\sqrt{3}}{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})} = 5-\sqrt{3} - \frac{2-\sqrt{3}}{4-(\sqrt{3})^2} = 5-\sqrt{3} - \frac{2-\sqrt{3}}{4-3} = 5-\sqrt{3} - (2-\sqrt{3}) = 5-\sqrt{3}-2+\sqrt{3} = 3. \end{aligned}$$

Ответ: 3.

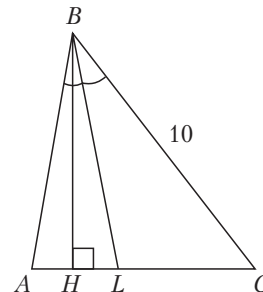
$$\text{В3. 1) Проведем } BH - \text{высоту треугольников } ABC \text{ и } BLC. \text{ Тогда } S_{BLC} = \frac{1}{2} BH \cdot LC$$

$$\text{и } S_{ABC} = \frac{1}{2} BH \cdot AC. \text{ Так как } S_{BLC} = \frac{2}{5} S_{ABC}, \text{ то } \frac{1}{2} BH \cdot LC = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{2} BH \cdot AC, \text{ т. е. } \frac{LC}{AC} = \frac{2}{5}.$$

Пусть $LC = 2x$; $AC = 5x$, тогда $AL = AC - LC = 5x - 2x = 3x$.

$$2) \text{ По теореме о биссектрисе треугольника } \frac{AB}{BC} = \frac{AL}{LC}, \text{ т. е. } \frac{AB}{10} = \frac{3x}{2x}; AB = 10 \cdot \frac{3}{2} = 15.$$

Ответ: 15.



$$\text{В4. Раскроем скобки в левой части уравнения и запишем его в виде } 6x - 9 = x^2|x-3| + x^2;$$

$$x^2|x-3| + x^2 - 6x + 9 = 0; \quad x^2|x-3| + (x-3)^2 = 0. \text{ Так как } x^2|x-3| \geq 0 \text{ и } (x-3)^2 \geq 0 \text{ при любых действительных}$$

$$\text{значениях } x, \text{ то уравнение } x^2|x-3| + (x-3)^2 = 0 \text{ равносильно системе } \begin{cases} x^2|x-3| = 0, \\ (x-3)^2 = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x = 0, \\ x = 3; \\ x = 3; \end{cases} \quad x = 3.$$

Ответ: 3.

В5. Пусть a руб. — стоимость первой книги, b руб., x руб. и d руб. — стоимость второй, третьей и четвертой книг соответственно. Тогда

$$\begin{cases} b + x + d = 48\,000, \\ a + x + d = 46\,000, \\ a + b + d = 42\,000, \\ a + b + x = 38\,000. \end{cases}$$

Сложим уравнения системы и получим:

$$3a + 3b + 3x + 3d = 48\,000 + 46\,000 + 42\,000 + 38\,000; \quad 3(a + b + x + d) = 174\,000;$$

$$a + b + x + d = 58\,000; \quad x = 58\,000 - (a + b + d).$$

Так как $a + b + d = 42\,000$, то $x = 58\,000 - 42\,000 = 16\,000$.

Ответ: 16 000.

В6. 1) Проведем $CH \perp AD$, тогда длина отрезка CH равна расстоянию между параллельными гранями AA_1D_1D и BB_1C_1C , т. е. $CH = 4$.

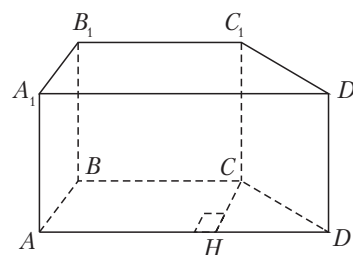
2) Обозначим длину бокового ребра призмы h , тогда $S_{AA_1D_1D} = AD \cdot h$

и $S_{BB_1C_1C} = BC \cdot h$, т. е. $AD = \frac{12}{h}$, а $BC = \frac{8}{h}$. Так как $S_{ABCD} = \frac{AD + BC}{2} \cdot CH$, то

$$S_{ABCD} = \frac{\frac{12}{h} + \frac{8}{h}}{2} \cdot 4 = \frac{40}{h}.$$

3) По формуле $V = S_{\text{осн}} \cdot h$ найдем объем призмы: $V = \frac{40}{h} \cdot h = 40$.

Ответ: 40.



ТЕСТ 12

Часть А

A1. Верным является равенство $c^2 + d^2 - 2cd = (c - d)^2$.

Ответ: 4.

A2. Прямая является графиком линейной функции (функции вида $y = kx + b$).

В данном случае линейной является функция $y = -8$ ($k = 0$; $b = -8$). Ее графиком является прямая, параллельная оси абсцисс и пересекающая ось ординат в точке с абсциссой -8 .

Ответ: 4.

A3. $a^{\frac{1}{3}} + a^{\frac{1}{3}} = 2a^{\frac{1}{3}}$.

Ответ: 4.

A4. По признаку параллельности прямой и плоскости: $AB \parallel DC$; $DC \subset (SDC)$, значит, $AB \parallel (SDC)$.

Ответ: 1.

A5. 1) Так как число A составляет 180 % от 75, то $A = 1,8 \cdot 75 = 135$.

2) Так как 75 % числа B равны 180, то $B = 180 : 0,75 = 240$.

3) Так как число C можно представить в виде суммы двух чисел, отношение которых равно 11 : 3, то пусть $C = 11x + 3x = 14x$. Поскольку меньшее из слагаемых равно 27, то $3x = 27$; $x = 9$. Тогда $C = 14 \cdot 9 = 126$.

4) Так как число D составляет $\frac{5}{7}$ от числа 140, то $D = 140 \cdot \frac{5}{7} = 100$.

5) Так как $\frac{7}{13}$ числа E равны 91, то $E = 91 : \frac{7}{13} = 91 \cdot \frac{13}{7} = 169$.

Найдем искомую сумму: $A + B + C + D + E = 135 + 240 + 126 + 100 + 169 = 770$.

Ответ: 5.

A6. I способ. Рассмотрим функцию $y = 36x^2 + 12x + 1$.

$a = 36 > 0$ и $D = 12^2 - 4 \cdot 36 \cdot 1 = 144 - 144 = 0$; $x_{1,2} = -\frac{12}{2 \cdot 36} = -\frac{1}{6}$.

Неравенство $36x^2 + 12x + 1 \leq 0$ выполняется при $x = -\frac{1}{6}$.

II способ. Решим неравенство методом интервалов.

$36x^2 + 12x + 1 \leq 0$; $(6x + 1)^2 \leq 0$.

То есть неравенство верно при $x = -\frac{1}{6}$.

III способ. Так как исходное неравенство можно представить в виде $(6x + 1)^2 \leq 0$, а квадрат числа не может быть числом отрицательным, то неравенство выполняется только при $x = -\frac{1}{6}$.

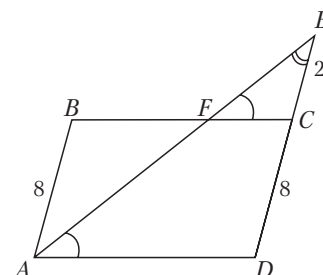
Ответ: 4.

A7. 1) Так как четырехугольник $ABCD$ — параллелограмм, то $CD = AB = 8$.

2) Треугольник ADE подобен треугольнику FCE , так как $\angle FEC$ — общий и $\angle EFC = \angle EAD$ (как соответственные при $BC \parallel AD$ и секущей AE). Найдем коэффициент подобия: $k = \frac{ED}{EC} = \frac{10}{2} = 5$. Так как площади подобных треугольников

относятся как квадрат коэффициента подобия, то $\frac{S_{ADE}}{S_{FCE}} = k^2 = 25 = 25 : 1$.

Ответ: 3.



A8. График функции $y = (x - 3)^2 - 4$, заданной на множестве $D = [0; 4] \cup \{5; 6\}$, изображен на первом рисунке.

Ответ: 1.

A9. Воспользуемся формулой $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$ и разложим на множители квадратные трехчлены $x^2 - x - 6$; $x^2 - 4x - 5$ и $x^2 - 7x + 10$. Тогда выражение принимает вид

$$\left(\frac{(x-3)(x+2)}{(x-2)(x+2)} - \frac{(x-5)(x+1)}{(x-5)(x-2)} \right) \cdot \frac{4(x+4)}{x-2} = \left(\frac{x-3}{x-2} - \frac{x+1}{x-2} \right) \cdot \frac{x-2}{4(x+4)} = \frac{x-3-(x+1)}{x-2} \cdot \frac{x-2}{4(x+4)} =$$

$$= \frac{x-3-x-1}{x-2} \cdot \frac{x-2}{4(x+4)} = \frac{-4}{x-2} \cdot \frac{x-2}{4(x+4)} = -\frac{1}{x+4}.$$

Ответ: 2.

Часть В

B1. $(\sqrt{7}-3)\sqrt{16+6\sqrt{7}} = -(3-\sqrt{7})\sqrt{16+6\sqrt{7}} = -\sqrt{(3-\sqrt{7})^2 \cdot (16+6\sqrt{7})} = -\sqrt{(3^2 - 2 \cdot 3 \cdot \sqrt{7} + (\sqrt{7})^2) \cdot (16+6\sqrt{7})} =$

$$= -\sqrt{(9-6\sqrt{7}+7) \cdot (16+6\sqrt{7})} = -\sqrt{(16-6\sqrt{7}) \cdot (16+6\sqrt{7})} = -\sqrt{16^2 - (6\sqrt{7})^2} = -\sqrt{256 - 36 \cdot 7} = -\sqrt{256 - 252} =$$

$$= -\sqrt{4} = -2.$$

Ответ: -2.

B2. 1) Так как x_1 и x_2 — корни уравнения $x^2 - 5x - 89 = 0$, то с помощью теоремы Виета найдем, что $x_1 + x_2 = 5$; $x_1 \cdot x_2 = -89$.

2) Поскольку $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2$, то $x_1^2 + x_2^2 = 5^2 - 2 \cdot (-89) = 25 + 178 = 203$.

Ответ: 203.

B3. 1) Так как хорда BC делит окружность в отношении 1 : 2, то градусная мера меньшей дуги BC равна 120° . Тогда $\angle BOC = \angle BC = 120^\circ$.

2) По свойству касательной $BO \perp AB$ и $CO \perp AC$.

3) Поскольку сумма углов четырехугольника $OBAC$ равна 360° , то

$$\angle BAC = 360^\circ - (90^\circ + 90^\circ + 120^\circ) = 60^\circ.$$

4) Так как $AB = AC$ (по теореме об отрезках касательных) и $\angle BAC = 60^\circ$, то треугольник BAC — равносторонний. Воспользуемся формулой площади равностороннего треугольника $\left(S = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} \right)$ и найдем длину стороны треугольника BAC :

$$12\sqrt{3} = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4}; \quad a^2 = 48; \quad a = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}.$$

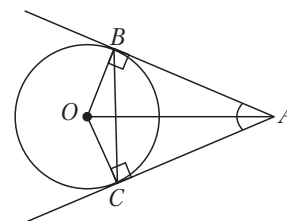
То есть $AB = BC = AC = 4\sqrt{3}$.

5) Проведем отрезок AO . Тогда AO — биссектриса угла BAC , т. е. $\angle OAC = 60^\circ : 2 = 30^\circ$.

Так как треугольник OAC — прямоугольный, то

$$\operatorname{tg} \angle OAC = \frac{OC}{AC}; \quad OC = AC \cdot \operatorname{tg} \angle OAC; \quad OC = 4\sqrt{3} \cdot \operatorname{tg} 30^\circ = 4\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = 4.$$

Ответ: 4.



B4. Область определения функции $y = \sqrt[6]{|3x+6|+|4-3x|-10} + \frac{1}{x^2-|x|-30}$ совпадает с множеством решений

системы неравенств
$$\begin{cases} |3x+6|+|4-3x|-10 \geq 0, \\ x^2-|x|-30 \neq 0. \end{cases}$$

Запишем первое неравенство системы в виде $|3x+6|+|3x-4|-10 \geq 0$ и решим его с помощью метода промежутков:

$$\begin{array}{ccc}
\left\{ \begin{array}{l} x < -2, \\ -(3x+6)-(3x-4)-10 \geq 0; \\ -2 \leq x \leq 1\frac{1}{3}, \\ (3x+6)-(3x-4)-10 \geq 0; \\ x > 1\frac{1}{3}, \\ (3x+6)+(3x-4)-10 \geq 0; \end{array} \right. &
\left\{ \begin{array}{l} x < -2, \\ -3x-6-3x+4-10 \geq 0; \\ -2 \leq x \leq 1\frac{1}{3}, \\ 3x+6-3x+4-10 \geq 0; \\ x > 1\frac{1}{3}, \\ 3x+6+3x-4-10 \geq 0; \end{array} \right. &
\left\{ \begin{array}{l} x < -2, \\ -6x-12 \geq 0; \\ -2 \leq x \leq 1\frac{1}{3}, \\ 0x+0 \geq 0; \\ x > 1\frac{1}{3}, \\ 6x-8 \geq 0; \end{array} \right. \\
&
\left\{ \begin{array}{l} x < -2, \\ x \leq -2; \\ -2 \leq x \leq 1\frac{1}{3}, \\ x \in \mathbf{R}; \\ x > 1\frac{1}{3}, \\ x \geq \frac{4}{3}; \end{array} \right. &
\left\{ \begin{array}{l} x < -2, \\ -2 \leq x \leq 1\frac{1}{3}, \\ x > 1\frac{1}{3}. \end{array} \right. x \in \mathbf{R}.
\end{array}$$

Решим второе неравенство системы: $x^2 - |x| - 30 \neq 0$; $|x|^2 - |x| - 30 \neq 0$; $|x| \neq 6$; $|x| \neq -5$, тогда $x \neq \pm 6$.

Таким образом, областью определения данной функции является множество всех действительных чисел, кроме чисел 6 и -6.

Произведение целых чисел, не входящих в область определения данной функции, равно $6 \cdot (-6) = -36$.

Ответ: -36.

B5. Пусть x — цифра десятков, а y — цифра единиц исходного числа, тогда $(10x + y)$ — само число, а $(10y + x)$ — число, записанное теми же числами, но в обратном порядке. Рассмотрим сумму

$$(10x + y) + (10y + x) = 11x + 11y = 11(x + y).$$

Полученное выражение может быть квадратом натурального числа, только если $x + y = 11$.

Учитывая, что x и y — цифры, получим возможные значения x и y :

при $x = 9$ $y = 2$;

при $x = 8$ $y = 3$;

при $x = 7$ $y = 4$;

при $x = 6$ $y = 5$;

при $x = 5$ $y = 6$;

при $x = 4$ $y = 7$;

при $x = 3$ $y = 8$;

при $x = 2$ $y = 9$.

Таким образом, существует восемь чисел, удовлетворяющих условию задачи.

Ответ: 8.

B6. Запишем уравнение в виде $x\sqrt{1+x} = 2\sqrt{x^2+1} - \sqrt{3-x}$ и возведем обе его части в квадрат при условии

$$\begin{cases} x \geq 0, \\ 2\sqrt{x^2+1} - \sqrt{3-x} \geq 0; \\ x < 0, \\ 2\sqrt{x^2+1} - \sqrt{3-x} < 0. \end{cases}$$

$$1)(x\sqrt{1+x})^2 = (2\sqrt{x^2+1} - \sqrt{3-x})^2; x^2(1+x) = 4(x^2+1) - 4\sqrt{x^2+1} \cdot \sqrt{3-x} + 3-x;$$

$$x^2 + x^3 = 4x^2 - x + 7 - 4\sqrt{3x^2 - x^3 + 3 - x}; x^3 - 3x^2 + x - 3 + 4\sqrt{-x^3 + 3x^2 - x + 3} = 4.$$

Пусть $\sqrt{-x^3+3x^2-x+3}=t$, тогда $-x^3+3x^2-x+3=t^2$ и уравнение принимает вид $-t^2+4t=4$;
 $t^2-4t+4=0$; $(t-2)^2=0$; $t=2$.

Таким образом,

$$\sqrt{-x^3+3x^2-x+3}=2; \quad -x^3+3x^2-x+3=4; \quad -x^3+3x^2-x-1=0; \quad x^3-3x^2+x+1=0;$$

$$x^3-x^2-2x^2+x+1=0; \quad x^2(x-1)-(2x^2-x-1)=0; \quad x^2(x-1)-2(x-1)\left(x+\frac{1}{2}\right)=0;$$

$$(x-1)\left(x^2-2\left(x+\frac{1}{2}\right)\right)=0; \quad (x-1)(x^2-2x-1)=0; \quad \begin{cases} x=1, \\ x=1+\sqrt{2}, \\ x=1-\sqrt{2}. \end{cases}$$

$$2) \text{ Решим совокупность } \begin{cases} \begin{cases} x \geq 0, \\ 2\sqrt{x^2+1} \geq \sqrt{3-x}; \end{cases} & \begin{cases} x \geq 0, \\ 4x^2+4 \geq 3-x, \\ 3-x \geq 0; \end{cases} & \begin{cases} x \geq 0, \\ 4x^2+x+1 \geq 0, \\ x \leq 3; \end{cases} & \begin{cases} x \geq 0, \\ x \in \mathbf{R}, \\ x \leq 3; \end{cases} \\ \begin{cases} x < 0, \\ 2\sqrt{x^2+1} < \sqrt{3-x}; \end{cases} & \begin{cases} x < 0, \\ 4x^2+4 < 3-x; \end{cases} & \begin{cases} x < 0, \\ 4x^2+x+1 < 0, \\ 4x^2+4 \geq 0; \end{cases} & \begin{cases} x < 0, \\ x \in \emptyset, \\ x \in \mathbf{R}; \end{cases} \end{cases} \quad x \in 0; 3.$$

Полученному условию удовлетворяют числа $x=1$ и $x=1+\sqrt{2}$.

Таким образом, исходное уравнение имеет два корня.

Ответ: 2.

ТЕСТ 13

Часть А

A1. Так как сумма корней искомого уравнения равна 6, а произведение корней равно -17 , то второй коэффициент уравнения равен -6 , а свободный член равен -17 . Данному условию удовлетворяет уравнение под номером 5.

Ответ: 5.

A2. На рисунке изображено решение неравенства $-2 \leq x < 10$.

Ответ: 4.

A3. Воспользуемся формулой квадрата разности двух выражений $((a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2)$ и получим:

$$\left(0,3a - \frac{b}{2}\right)^2 = (0,3a)^2 - 2 \cdot 0,3a \cdot \frac{b}{2} + \left(\frac{b}{2}\right)^2 = 0,09a^2 - 0,3a + \frac{b^2}{4}.$$

Ответ: 5.

A4. Так как наименьшим положительным периодом функции является число 3, любое число вида $3n$, $n \in \mathbb{Z}$, $n \neq 0$, также является периодом данной функции. Таким образом, из предложенных чисел только число 2 не может являться периодом этой функции.

Ответ: 3.

A5. 1) Воспользуемся основным тригонометрическим тождеством и найдем $\sin \alpha$:

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1; \quad \sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha; \quad \sin^2 \alpha = 1 - \left(\frac{5}{11}\right)^2 = 1 - \frac{25}{121} = \frac{96}{121}. \quad \sin \alpha = \pm \sqrt{\frac{96}{121}} = \pm \frac{4\sqrt{6}}{11}.$$

Так как $-\frac{\pi}{2} < \alpha < 0$, а синус угла, принадлежащего четвертой четверти, отрицательный, то $\sin \alpha = -\frac{4\sqrt{6}}{11}$.

$$2) \text{ Так как } \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}, \text{ то } \operatorname{tg} \alpha = -\frac{4\sqrt{6}}{11} : \frac{5}{11} = -\frac{4\sqrt{6}}{5}.$$

Ответ: 1.

$$\begin{aligned} \text{A6. } (5^{-10} - 3 \cdot 0,04^5) \cdot \sqrt[3]{5^{27}} &= \left(5^{-10} - 3 \cdot \left(\frac{1}{25}\right)^5\right) \cdot 5^9 = \left(5^{-10} - 3 \cdot \left(\frac{1}{5^2}\right)^5\right) \cdot 5^9 = \left(5^{-10} - 3 \cdot (5^{-2})^5\right) \cdot 5^9 = \\ &= (5^{-10} - 3 \cdot 5^{-10}) \cdot 5^9 = (-2 \cdot 5^{-10}) \cdot 5^9 = -2 \cdot 5^{-10+9} = -2 \cdot 5^{-1} = -2 \cdot \frac{1}{5} = -\frac{2}{5}. \end{aligned}$$

Ответ: 4.

$$\text{A7. } \sqrt{x+5} = x-1; \quad \begin{cases} x+5 = (x-1)^2, \\ x-1 \geq 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x+5 = x^2 - 2x + 1, \\ x \geq 1; \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 - 3x - 4 = 0, \\ x \geq 1; \end{cases} \quad \begin{cases} x = 4, \\ x = -1; \\ x \geq 1; \end{cases} \quad x = 4.$$

Ответ: 3.

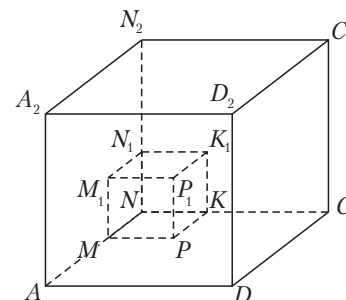
A8. 1) Пусть $NA = a$; $NC = b$; $NN_2 = c$, тогда $V_{ANCD A_2 N_2 C_2 D_2} = abc = 128$.

$$2) \text{ Так как } MA = 0,75AN, \text{ то } MA = \frac{3}{4}a; \quad MN = NA - MA = \frac{1}{4}a.$$

$$\text{Так как } NK \text{ составляет } 25\% \text{ от } NC, \text{ то } NK = \frac{1}{4}b.$$

$$\text{Кроме того, } N_2N : N_1N_2 = 4:3, \text{ т. е. } NN_1 = \frac{1}{4}c. \text{ Тогда}$$

$$V_{MNKPM_1N_1K_1P_1} = NM \cdot NK \cdot NN_1 = \frac{1}{4}a \cdot \frac{1}{4}b \cdot \frac{1}{4}c = \frac{1}{64}abc = \frac{1}{64} \cdot 128 = 2.$$



Ответ: 2.

A9. На рисунке изображен график квадратичной функции $y = (x-3)^2 - 2$, полученный из графика функции $y = x^2$ смещением его на три единичных отрезка вправо вдоль оси абсцисс и на два единичных отрезка вниз вдоль оси ординат.

Ответ: 3.

Часть В

B1. 1) По теореме о биссектрисе угла треугольника $\frac{AL}{AB} = \frac{LC}{BC}$.

По условию задачи один из отрезков, на которые биссектриса разделила сторону AC , равен одной из двух других сторон.

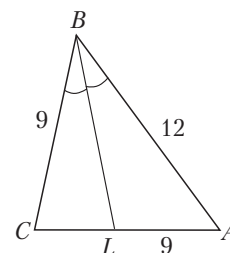
2) Если отрезок $AL = 9$, то $LC = 12$ и $AC = AB + BC$, т. е. такого треугольника не существует.

3) Если отрезок $AL = 12$, то $LC = \frac{AL \cdot BC}{AB} = \frac{12 \cdot 12}{9} = 16$ и $AC = 12 + 16 = 28$, но $28 > 9 + 12$, значит, такого треугольника не существует.

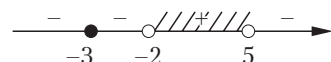
4) Пусть отрезок $LC = 9$, тогда $AL = \frac{LC \cdot AB}{BC} = \frac{9 \cdot 9}{12} = 6,75$ и $AC = 6,75 + 9 = 15,75$.

Так как $15,75 < 9 + 12$, то треугольник существует. Поскольку рассмотрены все возможные варианты длин отрезков AL и LC , то $AC = 15,75$, тогда $4 \cdot c = 4 \cdot 15,75 = 63$.

Ответ: 63.



B2. Решим неравенство $\frac{(3+x)^2}{(5-x)(x+2)} \geq 0$ методом интервалов:



$x \in \{-3\} \cup (-2; 5)$. Таким образом, наименьшим целым решением данного неравенства является число -3 .

Ответ: -3 .

$$\text{B3. } x^2 - 5x \frac{|x-2|}{x-2} - 14 = 0; \quad \begin{cases} x > 2, \\ x^2 - 5x - 14 = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x > 2; \\ x = 7, \\ x = -2; \end{cases} \quad \begin{cases} x = 7, \\ x = -7. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x < 2, \\ x^2 + 5x - 14 = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x < 2; \\ x = -7, \\ x = 2; \end{cases}$$

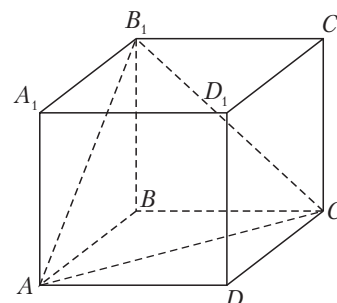
Произведение корней исходного уравнения равно -49 .

Ответ: -49 .

B4. 1) Так как отрезки AB_1 , B_1C и AC — диагонали равных квадратов, то треугольник AB_1C — равносторонний. С помощью формулы $S = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4}$ найдем длину стороны треугольника: $AB_1 = \sqrt{\frac{4 \cdot 18 \sqrt{3}}{\sqrt{3}}} = 6\sqrt{2}$.

2) Площадь квадрата AA_1B_1B найдем по формуле $S = \frac{d^2}{2}$, где $d = AB_1 = 6\sqrt{2}$:

$$S_{AA_1B_1B} = \frac{(6\sqrt{2})^2}{2} = 36. \text{ Значит, площадь поверхности куба равна } 6 \cdot 36 = 216.$$



Ответ: 216.

$$\text{B5. } \begin{cases} 2\left(\frac{4x^2}{9y^2} + \frac{9y^2}{4x^2}\right) - 9\left(\frac{2x}{3y} + \frac{3y}{2x}\right) + 14 = 0, \\ 4x^2 + 9y^2 = 5. \end{cases}$$

Рассмотрим первое уравнение системы $2\left(\frac{4x^2}{9y^2} + \frac{9y^2}{4x^2}\right) - 9\left(\frac{2x}{3y} + \frac{3y}{2x}\right) + 14 = 0$.

Пусть $\frac{2x}{3y} + \frac{3y}{2x} = t$. Возведем обе части данного равенства в квадрат и получим: $\left(\frac{2x}{3y} + \frac{3y}{2x}\right)^2 = t^2$;

$$\left(\frac{2x}{3y}\right)^2 + 2 \cdot \frac{2x}{3y} \cdot \frac{3y}{2x} + \left(\frac{3y}{2x}\right)^2 = t^2; \quad \frac{4x^2}{9y^2} + 2 + \frac{9y^2}{4x^2} = t^2; \quad \frac{4x^2}{9y^2} + \frac{9y^2}{4x^2} = t^2 - 2.$$

Тогда уравнение принимает вид $2(t^2 - 2) - 9t + 14 = 0$; $2t^2 - 4 - 9t + 14 = 0$; $2t^2 - 9t + 10 = 0$; $\begin{cases} t = 2, \\ t = \frac{5}{2}. \end{cases}$

То есть $\begin{cases} \frac{2x}{3y} + \frac{3y}{2x} = 2, \\ \frac{2x}{3y} + \frac{3y}{2x} = \frac{5}{2}. \end{cases}$ Вернемся к системе: $\begin{cases} \frac{2x}{3y} + \frac{3y}{2x} = 2, \\ \frac{2x}{3y} + \frac{3y}{2x} = \frac{5}{2}; \\ 4x^2 + 9y^2 = 5; \end{cases} \begin{cases} \frac{2x}{3y} + \frac{3y}{2x} = 2, \\ 4x^2 + 9y^2 = 5; \\ \frac{2x}{3y} + \frac{3y}{2x} = \frac{5}{2}, \\ 4x^2 + 9y^2 = 5; \end{cases} \begin{cases} \frac{4x^2 + 9y^2}{6xy} = 2, \\ 4x^2 + 9y^2 = 5; \\ \frac{4x^2 + 9y^2}{6xy} = \frac{5}{2}, \\ 4x^2 + 9y^2 = 5; \end{cases} \begin{cases} \frac{5}{6xy} = 2, \\ 4x^2 + 9y^2 = 5; \\ \frac{5}{6xy} = \frac{5}{2}, \\ 4x^2 + 9y^2 = 5; \end{cases}$

$$\begin{cases} xy = \frac{5}{12}, \\ 4x^2 + 9y^2 = 5; \end{cases} \begin{cases} x = \frac{5}{12y}, \\ 4x^2 + 9y^2 = 5; \end{cases} \begin{cases} x = \frac{5}{12y}, \\ 4\left(\frac{5}{12y}\right)^2 + 9y^2 = 5; \end{cases} \begin{cases} x = \frac{5}{12y}, \\ \frac{25}{36y^2} + 9y^2 = 5; \end{cases} \begin{cases} x = \frac{5}{12y}, \\ 324y^4 - 180y^2 + 25 = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} xy = \frac{1}{3}, \\ 4x^2 + 9y^2 = 5; \end{cases} \begin{cases} x = \frac{1}{3y}, \\ 4x^2 + 9y^2 = 5; \end{cases} \begin{cases} x = \frac{1}{3y}, \\ 4\left(\frac{1}{3y}\right)^2 + 9y^2 = 5; \end{cases} \begin{cases} x = \frac{1}{3y}, \\ \frac{4}{9y^2} + 9y^2 = 5; \end{cases} \begin{cases} x = \frac{1}{3y}, \\ 81y^4 - 45y^2 + 4 = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{5}{12y}, \\ 324y^4 - 180y^2 + 25 = 0; \end{cases} \begin{cases} x = \frac{5}{12y}, \\ (18y^2 - 5)^2 = 0; \end{cases} \begin{cases} x = \frac{5}{12y}, \\ 18y^2 - 5 = 0; \end{cases} \begin{cases} x = \frac{5}{12y}, \\ y = \pm\sqrt{\frac{5}{18}}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{1}{3y}, \\ 81y^4 - 45y^2 + 4 = 0; \end{cases} \begin{cases} x = \frac{1}{3y}, \\ y^2 = \frac{45 \pm 27}{2 \cdot 81}; \end{cases} \begin{cases} x = \frac{1}{3y}, \\ y^2 = \frac{4}{9}; \end{cases} \begin{cases} x = \frac{1}{3y}, \\ y^2 = \frac{1}{9}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{1}{3y}, \\ y = \pm\frac{2}{3}; \end{cases} \begin{cases} x = \frac{1}{3y}, \\ y = \pm\frac{1}{3}; \end{cases}$$

Таким образом, система имеет шесть решений:

$$\left(\frac{\sqrt{10}}{4}; \sqrt{\frac{5}{18}}\right); \left(-\frac{\sqrt{10}}{4}; -\sqrt{\frac{5}{18}}\right); \left(\frac{1}{2}; \frac{2}{3}\right); \left(-\frac{1}{2}; -\frac{2}{3}\right); \left(1; \frac{1}{3}\right); \left(-1; -\frac{1}{3}\right).$$

Ответ: 6.

В6. Пусть v_1, v_2, v_3 км/ч — скорости движения пешком, на велосипеде и на мотоцикле соответственно, t ч —

искоемое время. Тогда $\begin{cases} \frac{3}{v_1} + \frac{4}{v_2} + \frac{2}{v_3} = \frac{5}{6}, \\ \frac{5}{v_1} + \frac{2}{v_2} + \frac{4}{v_3} = \frac{7}{6}, \\ \frac{6}{v_1} + \frac{22}{v_2} + \frac{2}{v_3} = t. \end{cases}$ Пусть $\frac{1}{v_1} = a$; $\frac{1}{v_2} = b$; $\frac{1}{v_3} = c$, тогда система принимает вид

$$\left\{ \begin{array}{l} 3a + 4b + 2c = \frac{5}{6}, \\ 5a + 2b + 4c = \frac{7}{6}, \\ 6a + 22b + 2c = t; \end{array} \right. \cdot \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -1 \end{pmatrix} \quad \left\{ \begin{array}{l} 3a + 4b + 2c = \frac{5}{6}, \\ -\frac{5}{2}a - b - 2c = -\frac{7}{12}, \\ -6a - 22b - 2c = -t. \end{array} \right.$$

Сложим первое и второе; первое и третье уравнения системы и получим:

$$\left\{ \begin{array}{l} 3a + 4b + 2c = \frac{5}{6}, \\ \frac{1}{2}a + 3b = \frac{1}{4}, \\ -3a - 18b = -t + \frac{5}{6}; \end{array} \right. \quad | \cdot (6) \quad \left\{ \begin{array}{l} 3a + 4b + 2c = \frac{5}{6}, \\ 3a + 18b = \frac{3}{2}, \\ -3a - 18b = -t + \frac{5}{6}. \end{array} \right.$$

Сложив второе и третье уравнение системы, получим

$$\left\{ \begin{array}{l} 3a + 4b + 2c = \frac{5}{6}, \\ 3a + 18b = \frac{3}{2}, \\ 0 = -t + \frac{5}{6} + \frac{3}{2}. \end{array} \right.$$

То есть $t = \frac{5}{6} + \frac{3}{2} = \frac{14}{6}$ ч, или 140 мин.

Ответ: 140.

ТЕСТ 14

Часть А

A1. Верным является равенство $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{ctg} \alpha}$.

Ответ: 3.

A2. На рисунке изображен график функции $y = \frac{2}{x}$.

Ответ: 4.

A3. 1) Так как площади подобных треугольников относятся как квадрат коэффициента подобия, то $k^2 = \frac{S_1}{S_2}$; $k^2 = \frac{16}{25}$; $k = \frac{4}{5}$.

2) Периметры подобных треугольников относятся как коэффициент подобия, т. е.

$$\frac{P_1}{P_2} = k; \quad \frac{P_1}{P_2} = \frac{4}{5}; \quad \frac{12}{P_2} = \frac{4}{5}; \quad P_2 = 15.$$

Ответ: 5.

A4. Решим предложенные неравенства:

- 1) $x^2 \leq 0$; $x = 0$;
- 2) $x^2 \geq 0$; $x \in (-\infty; +\infty)$;
- 3) $x^2 < 0$ — нет решений;
- 4) $x^2 > -16$; $x \in (-\infty; +\infty)$;
- 5) $x^2 \leq 49$; $x \in [-7; 7]$.

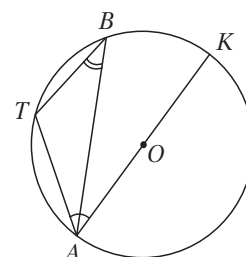
Ответ: 3.

A5. 1) $\cup TA = 2 \cdot \angle TAB = 2 \cdot 35^\circ = 70^\circ$ (так как вписанный угол равен половине градусной меры дуги, на которую он опирается).

2) Так как AK — диаметр, то $\cup BK = 180^\circ - \cup TA = 180^\circ - 70^\circ = 110^\circ$.

3) По теореме о вписанном угле $\angle BAK = \frac{1}{2} \cup BK = \frac{110^\circ}{2} = 55^\circ$.

Ответ: 4.



A6. Найдем скорость второго поезда: $60,5 \cdot 0,8 = 48,4$ км/ч.

Найдем время, через которое поезда встретились: $96,8 : 48,4 = 2$ ч.

Найдем, какое расстояние до встречи прошел первый поезд: $60,5 \cdot 2 = 121$ км.

Найдем расстояние между станциями: $121 + 96,8 = 217,8$ км.

Ответ: 5.

$$\begin{aligned} \text{A7. } & 4\sqrt{3\frac{1}{2}} - 0,5\sqrt{56} - 3\sqrt{1\frac{5}{9}} = 4\sqrt{\frac{7}{2}} - 0,5\sqrt{4 \cdot 14} - 3\sqrt{\frac{14}{9}} = 4 \cdot \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{2}} - 0,5 \cdot 2\sqrt{14} - 3 \cdot \frac{\sqrt{14}}{3} = 4 \cdot \frac{\sqrt{7} \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} - \sqrt{14} - \sqrt{14} = \\ & = 4 \cdot \frac{\sqrt{14}}{2} - \sqrt{14} - \sqrt{14} = 2\sqrt{14} - \sqrt{14} - \sqrt{14} = 0. \end{aligned}$$

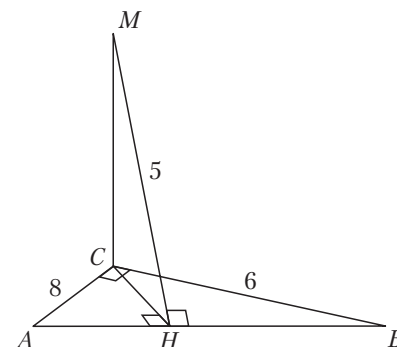
Ответ: 5.

A8. Так как $-1 \leq f(x) \leq 1$ и $-1 \leq f(x+3) \leq 1$, то $-2 \leq 2f(x+3) \leq 2$, тогда $-1 \leq 2f(x+3) + 1 \leq 3$. То есть множеством значений функции $y = 2f(x+3) + 1$ является промежуток $[-1; 3]$.

Ответ: 2.

A9. 1) Проведем CH — высоту треугольника ABC . По теореме о трех перпендикулярах $MH \perp AB$, т. е. длина отрезка MH равна расстоянию от точки M до стороны AB , тогда $MH = 5$.

2) По теореме Пифагора гипотенуза треугольника ABC $AB = 10$. По формуле $h = \frac{ab}{c}$ найдем $CH = \frac{8 \cdot 6}{10} = 4,8$.



3) Так как отрезок CM — перпендикуляр к плоскости ABC , а прямая CP лежит в этой плоскости, то $MC \perp CH$ и треугольник CMH является прямоугольным. Тогда по теореме Пифагора:

$$MC = \sqrt{MH^2 - CH^2} = \sqrt{5^2 - 4,8^2} = \sqrt{(5-4,8)(5+4,8)} = \sqrt{0,2 \cdot 9,8} = \sqrt{0,2 \cdot 0,2 \cdot 49} = 0,2 \cdot 7 = 1,4.$$

Ответ: 4.

Часть В

B1. Найдем абсциссу точки B : $4 = 2x + 6$; $2x = -2$; $x = -1$.

Так как точка B имеет координаты $B(-1; 4)$, то точка D , симметричная точке B относительно оси ординат, имеет координаты $D(1; 4)$. Таким образом, абсцисса точки D равна 1.

Ответ: 1.

B2. Исходное уравнение имеет вид $\frac{a}{|a|} = -1$. Полученное равенство равносильно неравенству $a < 0$. Таким

образом, уравнение $\frac{x^2 - 5x + 4}{|x^2 - 5x + 4|} = -1$ равносильно неравенству $x^2 - 5x + 4 < 0$. Решим полученное неравенство:

$(x-1)(x-4) < 0$, $x \in (1; 4)$. Целыми корнями данного уравнения являются числа 2 и 3. Их сумма равна 5.

Ответ: 5.

B3. Уравнение $\sqrt{x-1} \cdot (-x^2 + x + 2) = 0$ равносильно совокупности

$$\begin{cases} x-1=0; \\ x-1 \geq 0, \\ -x^2+x+2=0; \end{cases} \begin{cases} x=1; \\ x \geq 1, \\ x^2-x-2=0; \end{cases} \begin{cases} x=1; \\ x \geq 1; \\ x=2, \\ x=-1; \end{cases} \begin{cases} x=1, \\ x=2. \end{cases}$$

Сумма корней уравнения равна 3.

Ответ: 3.

B4. 1) Найдем нули выражения $-x^2 + 36$: $-x^2 + 36 = 0$; $x^2 = 36$; $x = \pm 6$.

2) Решим систему $\begin{cases} -x^2 + 36 > 0, \\ x+2 > 0; \end{cases} \begin{cases} x^2 - 36 < 0, \\ x+2 > 0; \end{cases} \begin{cases} (x-6)(x+6) < 0, \\ x > -2; \end{cases} \begin{cases} x \in (-6; 6), \\ x \in (-2; +\infty); \end{cases} x \in (-2; 6).$

3) Учитывая, что при $x = \pm 6$ функция определена, получим $D(y) = \{-6\} \cup (-2; 6]$. Тогда наименьшим целым числом, входящим в область определения функции, является число -6 .

Ответ: -6 .

B5. $\left(\frac{x}{x-1}\right)^2 + \left(\frac{x}{x+1}\right)^2 = 90$. Выделим квадрат суммы в левой части уравнения:

$$\left(\left(\frac{x}{x-1}\right)^2 + \left(\frac{x}{x+1}\right)^2 + 2 \cdot \frac{x}{x-1} \cdot \frac{x}{x+1}\right) - 2 \cdot \frac{x}{x-1} \cdot \frac{x}{x+1} = 90; \left(\frac{x}{x-1} + \frac{x}{x+1}\right)^2 - 2 \cdot \frac{x}{x-1} \cdot \frac{x}{x+1} = 90;$$

$$\left(\frac{x(x+1) + x(x-1)}{x^2-1}\right)^2 - 2 \cdot \frac{x^2}{x^2-1} = 90; \left(\frac{x^2+x+x^2-x}{x^2-1}\right)^2 - 2 \cdot \frac{x^2}{x^2-1} = 90; \left(\frac{2x^2}{x^2-1}\right)^2 - \frac{2x^2}{x^2-1} = 90.$$

Пусть $\frac{2x^2}{x^2-1} = t$, тогда уравнение принимает вид $\frac{2x^2}{x^2-1}$. С помощью теоремы Виета получим

$$\begin{cases} t=10, \\ t=-9 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} \frac{2x^2}{x^2-1} = 10, \\ \frac{2x^2}{x^2-1} = -9; \end{cases} \begin{cases} 2x^2 = 10x^2 - 10, \\ 2x^2 = -9x^2 + 9; \end{cases} \begin{cases} 8x^2 = 10, \\ 11x^2 = 9; \end{cases} \begin{cases} x^2 = \frac{5}{4}, \\ x^2 = \frac{9}{11}; \end{cases} \begin{cases} x = \pm \frac{\sqrt{5}}{2}, \\ x = \pm \frac{3}{\sqrt{11}}. \end{cases}$$

Найдем произведение корней уравнения: $-\frac{\sqrt{5}}{2} \cdot \left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right) \cdot \left(-\frac{3}{\sqrt{11}}\right) \cdot \left(\frac{3}{\sqrt{11}}\right) = \frac{5 \cdot 9}{4 \cdot 11} = \frac{45}{44}$. Тогда $44 \cdot \frac{45}{44} = 45$.

Ответ: 45.

В6. 1) В плоскости SAC проведем OH параллельно SA . Тогда треугольник DBH — искомое сечение.

2) Из треугольника DBC по теореме Пифагора найдем длину отрезка DB : $DB = \sqrt{(2\sqrt{3})^2 + 2^2} = 4$.

3) В прямоугольном треугольнике SAB $\angle SBA = 60^\circ$, тогда

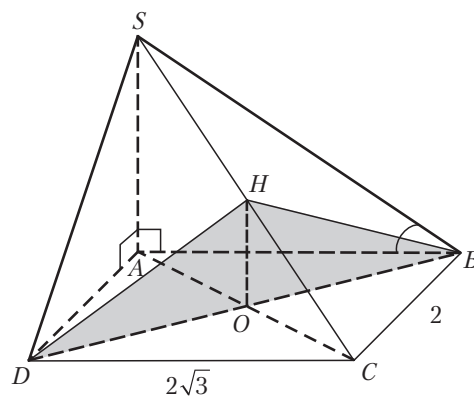
$$SA = AB \cdot \operatorname{tg} \angle SBA = 2\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = 6.$$

4) Отрезок OH является средней линией треугольника SAC , т. е. $OH = \frac{1}{2} SA = 3$.

5) Найдем площадь полученного сечения:

$$S_{DBH} = \frac{1}{2} DB \cdot OH = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 3 = 6.$$

Ответ: 6.



ТЕСТ 15

Часть А

A1. Неверным является утверждение под номером 5, так как угол между касательной и хордой, проведенными через одну из точек окружности, равен *половине* дуге окружности, заключенной между ними.

Ответ: 5.

$$\text{A2. } \frac{5/41}{200} + \frac{4/41}{250} = \frac{205}{1000} + \frac{164}{1000} = \frac{369}{1000}.$$

Ответ: 3.

$$\text{A3. } x^2 \leq 49; \quad x^2 - 49 \leq 0; \quad (x-7)(x+7) \leq 0 \quad -7 \leq x \leq 7.$$

Ответ: 5.



$$\text{A4. } \frac{\sin 3\alpha \sin \alpha - \cos \alpha \cos 3\alpha}{\cos^2 2\alpha - \sin^2 2\alpha} = \frac{-(\cos \alpha \cos 3\alpha - \sin 3\alpha \sin \alpha)}{\cos^2 2\alpha - \sin^2 2\alpha} = \frac{-\cos(\alpha + 3\alpha)}{\cos(2 \cdot 2\alpha)} = \frac{-\cos 4\alpha}{\cos 4\alpha} = -1.$$

Ответ: 1.

A5. Корнями уравнения $f(x) = 0$ являются абсциссы точек пересечения графика функции $y = f(x)$ с осью абсцисс (нули функции). Так как предложенный график пересекает ось абсцисс в четырех точках, то уравнение имеет четыре корня.

Ответ: 4.

A6. Так как первая часть относится ко второй как 2 : 3, вторая к третьей как 3 : 5, а третья к четвертой — как 5 : 6, то первая, вторая, третья и четвертая части относятся как 2 : 3 : 5 : 6.

$$2 + 3 + 5 + 6 = 16 \text{ (долей).}$$

$$128 : 16 = 8 \text{ — в одной доле.}$$

$$2 \cdot 8 = 16 \text{ — меньшая из частей.}$$

Ответ: 3.

$$\text{A7. На рисунке изображена графическая иллюстрация системы } 2) \begin{cases} y = -(x+1)^2 + 4, \\ y = -4. \end{cases}$$

Ответ: 2.

A8. По условию задачи $b_1 = 240$; $b_n = 15$; $q = 0,5$. Воспользуемся формулой n -го члена геометрической прогрессии $b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$ и решим уравнение: $15 = 240 \cdot 0,5^{n-1}$; $0,5^{n-1} = \frac{1}{16}$; $\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^4$; $n-1 = 4$; $n = 5$.

Ответ: 4.

$$\text{A9. } \frac{a^2 - b^2 - c^2 - 2bc}{b^2 - c^2 - a^2 - 2ac} = \frac{a^2 - (b^2 + c^2 + 2bc)}{b^2 - (c^2 + a^2 + 2ac)} = \frac{a^2 - (b+c)^2}{b^2 - (c+a)^2} = \frac{(a-(b+c))(a+(b+c))}{(b-(c+a))(b+(c+a))} = \frac{(a-b-c)(a+b+c)}{(b-c-a)(b+c+a)} = \frac{a-b-c}{b-c-a}.$$

Ответ: 2.

Часть В

$$\begin{aligned} \text{B1. } & \frac{1-\sqrt{10}}{\sqrt{2}+\sqrt{5}} + \frac{7}{2\sqrt{2}+1} - (11-5\sqrt{5})(2+\sqrt{5}) = \frac{(1-\sqrt{10})(\sqrt{2}-\sqrt{5})}{(\sqrt{2}+\sqrt{5})(\sqrt{2}-\sqrt{5})} + \frac{7(2\sqrt{2}-1)}{(2\sqrt{2}+1)(2\sqrt{2}-1)} - (11-5\sqrt{5})(2+\sqrt{5}) = \\ & = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{5}-\sqrt{20}+\sqrt{50}}{2-5} + \frac{7(2\sqrt{2}-1)}{8-1} - (22+11\sqrt{5}-10\sqrt{5}-25) = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{5}-2\sqrt{5}+5\sqrt{2}}{-3} + \frac{7(2\sqrt{2}-1)}{7} - (\sqrt{5}-3) = \\ & = \sqrt{5}-2\sqrt{2}+2\sqrt{2}-1-\sqrt{5}+3 = 2. \end{aligned}$$

Ответ: 2.

$$\text{в DCM: } BM = MD = \frac{MC}{\cos 45^\circ}; \quad BM = MD = \frac{5\sqrt{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 10.$$

Ответ: 10.

$$y = |x + 2| + |x + 3|$$

x	-5	-3	-2	1
y	5	1	1	3

$$y = x$$

x	0	3
y	0	3

Так как графики функций не пересекаются, то уравнение не имеет корней.

Ответ: 0.

В4. Неравенство вида $|f(x)| \geq |g(x)|$ равносильно неравенству $(f(x))^2 \geq (g(x))^2$.

То есть неравенство $|x^2 - 5|x| + 4| \geq |2x^2 - 3|x| + 1|$ равносильно неравенству

$$\begin{aligned} &(x^2-5|x|+4)^2 \geq (2x^2-3|x|+1)^2; \quad (x^2-5|x|+4)^2 - (2x^2-3|x|+1)^2 \geq 0; \\ &(x^2-5|x|+4-(2x^2-3|x|+1))(x^2-5|x|+4+(2x^2-3|x|+1)) \geq 0; \\ &(x^2-5|x|+4-2x^2+3|x|-1)(x^2-5|x|+4+2x^2-3|x|+1) \geq 0; \\ &(-x^2-2|x|+3)(3x^2-8|x|+5) \geq 0; \quad (x^2+2|x|-3)(3x^2-8|x|+5) \leq 0. \end{aligned}$$

Так как $x^2 = |x|^2$, то неравенство принимает вид $(|x|^2 + 2|x| - 3)(3|x|^2 - 8|x| + 5) \leq 0$.

Разложим на множители квадратные трехчлены в левой части неравенства:

$$(|x|+3)(|x|-1)(|x|-1)\left(|x|-1\frac{2}{3}\right)\leq 0; \quad (|x|+3)(|x|-1)^2\left(|x|-1\frac{2}{3}\right)\leq 0.$$

Для решения полученного неравенства воспользуемся методом интервалов:

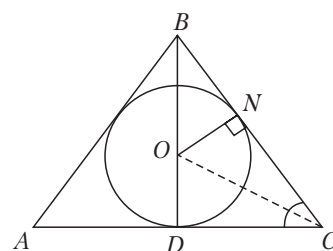
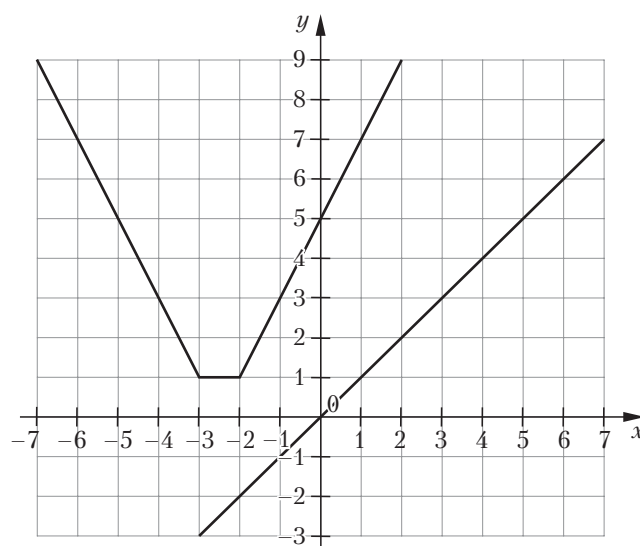
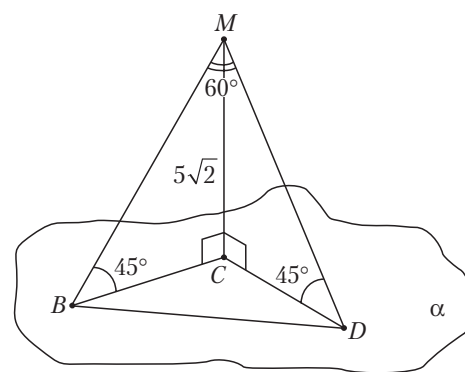
Таким образом, наименьшим целым решением данного неравенства является число -1 .

Ответ: -1 .

В5. 1) Так как радиус круга, вписанного в равнобедренный треугольник, составляет $\frac{2}{9}$ высоты, проведенной к основанию треугольника, то $\frac{OD}{BD} = \frac{2}{9}$. Тогда

$$OD=2x, \quad BD=9x, \quad BO=BD-OD=9x-2x=7x.$$

2) Так как центр вписанной в треугольник окружности является точкой пересечения биссектрис треугольника, отрезок CO является биссектрисой треугольника BDC .



По теореме о биссектрисе $\frac{BC}{DC} = \frac{BO}{DO} = \frac{7}{2}$, тогда $BC = 7y$; $DC = 2y$. То есть $AC = 2 \cdot DC = 4y$.

Так как периметр треугольника $P_{ABC} = 81$, то $7y + 7y + 4y = 81$; $18y = 81$; $y = 4,5$.

3) Найдем длину основания AC : $AC = 4y = 4 \cdot 4,5 = 18$.

Ответ: 18.

В6. Рассмотрим уравнение $x^3 + 2\sqrt{17}x^2 + 17x + \sqrt{17} + 1 = 0$ как квадратное относительно $\sqrt{17}$ и запишем его в виде $x(\sqrt{17})^2 + \sqrt{17}(2x^2 + 1) + x^3 + 1 = 0$. Тогда

$$D = (2x^2 + 1)^2 - 4 \cdot x \cdot (x^3 + 1) = 4x^4 + 4x^2 + 1 - 4x^4 - 4x = 4x^2 - 4x + 1 = (2x - 1)^2$$

$$\text{и} \begin{cases} \sqrt{17} = \frac{-(2x^2 + 1) + (2x - 1)}{2x}, & \begin{cases} \sqrt{17} = \frac{-x^2 + x - 1}{x}, & \begin{cases} \sqrt{17}x = -x^2 + x - 1, & \begin{cases} x^2 + \sqrt{17}x - x + 1 = 0, \\ x^2 + \sqrt{17}x + x = 0; \\ x \neq 0; \end{cases} \end{cases} \\ \sqrt{17} = \frac{-(2x^2 + 1) - (2x - 1)}{2x}; & \begin{cases} \sqrt{17} = \frac{-x^2 - x}{x}; & \begin{cases} \sqrt{17}x = -x^2 - x; \\ x \neq 0; \end{cases} \end{cases} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \begin{cases} x^2 + (\sqrt{17} - 1)x + 1 = 0, \\ x(x + \sqrt{17} + 1) = 0; \\ x \neq 0; \end{cases} & \begin{cases} x^2 + (\sqrt{17} - 1)x + 1 = 0, \\ x = 0, \\ x = -\sqrt{17} - 1; \\ x \neq 0; \end{cases} & \begin{cases} x^2 + (\sqrt{17} - 1)x + 1 = 0, \\ x = -\sqrt{17} - 1. \end{cases} \end{cases}$$

Сумма корней первого уравнения совокупности равна $-(\sqrt{17} - 1)$, тогда сумма корней исходного уравнения равна $-(\sqrt{17} - 1) + (-\sqrt{17} - 1) = -2\sqrt{17}$. Найдем значение искомого выражения: $\sqrt{17} \cdot (-2\sqrt{17}) = -34$.

Ответ: -34.

ТЕСТ 16

Часть А

A1. Так как прямая AB_1 лежит в плоскости грани AA_1B_1B , а прямая A_1C пересекает плоскость грани в точке A_1 , не лежащей на прямой AB_1 , то прямые A_1C и AB_1 являются скрещивающимися.

Ответ: 2.

A2. Данная функция убывает на промежутке $(1; 4)$.

Ответ: 3.

A3. Неравенство $\sqrt[6]{1-3x} < 2$ равносильно системе неравенств $\begin{cases} 1-3x \geq 0, \\ 1-3x < 64; \end{cases} \begin{cases} -3x \geq -1, \\ -3x < 63; \end{cases} \begin{cases} x \leq \frac{1}{3}, \\ x > -21; \end{cases} x \in \left(-21; \frac{1}{3}\right]$.

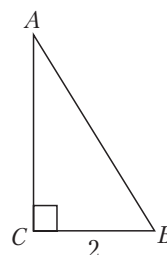
Ответ: 5.

A4. Площадь прямоугольного треугольника равна полупроизведению его катетов, т. е.

$$S_{ABC} = \frac{AC \cdot BC}{2}, \text{ тогда } AC = \frac{2 \cdot 4\sqrt{2}}{2} = 4\sqrt{2}.$$

$$\text{По теореме Пифагора } AB = \sqrt{(4\sqrt{2})^2 + 2^2} = 6.$$

$$\text{По определению синуса } \sin \angle BAC = \frac{BC}{AB} = \frac{1}{3}.$$



Ответ: 4.

A5. При $a = 2\sqrt{5}$ найдем значение выражения $\frac{a^3}{4} = \frac{(2\sqrt{5})^3}{4} = \frac{8 \cdot 5\sqrt{5}}{4} = 10\sqrt{5}$.

Ответ: 2.

$$\text{A6. } \frac{\sin 40^\circ - \cos 40^\circ}{\sqrt{2} \cos 85^\circ} = \frac{\sin 40^\circ - \sin 50^\circ}{\sqrt{2} \cos 85^\circ} = \frac{2 \sin \frac{40^\circ - 50^\circ}{2} \cos \frac{40^\circ + 50^\circ}{2}}{\sqrt{2} \cos 85^\circ} = \frac{2 \sin(-5^\circ) \cos 45^\circ}{\sqrt{2} \cos 85^\circ} = \frac{-2 \sin 5^\circ \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}}{\sqrt{2} \sin 5^\circ} = -1.$$

Ответ: 1.

A7. Пусть d — диагональ куба, тогда $a = \frac{d}{\sqrt{3}}$ — ребро куба.

$$V = a^3 = \left(\frac{d}{\sqrt{3}}\right)^3 = \frac{d^3}{3\sqrt{3}}. \text{ Так как } d = \sqrt[6]{3}, \text{ то } V = \frac{(\sqrt[6]{3})^3}{3\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3\sqrt{3}} = \frac{1}{3}.$$

Ответ: 4.

A8. Дискриминант квадратного уравнения $2x^2 - (\sqrt{3} + 5)x - \sqrt{4 + 2\sqrt{3}} = 0$ положителен.

По теореме Виета $x_1 + x_2 = \frac{\sqrt{3} + 5}{2}$, а $x_1 x_2 = -\frac{\sqrt{4 + 2\sqrt{3}}}{2}$. Тогда

$$x_1 + x_1 x_2 + x_2 = \frac{\sqrt{3} + 5}{2} - \frac{\sqrt{4 + 2\sqrt{3}}}{2} = \frac{\sqrt{3} + 5}{2} - \frac{\sqrt{(1 + \sqrt{3})^2}}{2} = \frac{\sqrt{3} + 5}{2} - \frac{1 + \sqrt{3}}{2} = 2.$$

Ответ: 2.

A9. Рассмотрим треугольник ABC — равносторонний.

Воспользуемся формулой, связывающей площадь равностороннего треугольника и длину его стороны $\left(S = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4}\right)$. Тогда $16\sqrt{3} = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4}$; $a = 8$.

Воспользуемся формулой, связывающей длину высоты равностороннего треугольника с длиной его стороны $\left(h = \frac{a\sqrt{3}}{2}\right)$. Тогда $AM = 4\sqrt{3}$.

Так как точка H является центром треугольника ABC , то $AH : HM = 2 : 1$. Тогда $AH = \frac{2AM}{3} = \frac{8\sqrt{3}}{3}$, а $HM = \frac{AM}{3} = \frac{4\sqrt{3}}{3}$.

1) Рассмотрим треугольник APH — прямоугольный ($\angle PHA = 90^\circ$):

$$PH = AH \cdot \operatorname{tg} \angle PAH = \frac{8\sqrt{3}}{3} \cdot \sqrt{3} = 8.$$

2) Угол PHM является углом наклона боковой грани пирамиды к ее основанию.

Из треугольника PHM получим:

$$\operatorname{tg} \angle PMH = \frac{PH}{HM}; \quad \operatorname{tg} \angle PMH = 8 \cdot \frac{3}{4\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}; \quad \angle PMH = \operatorname{arctg} 2\sqrt{3}.$$

3) Площадь боковой поверхности правильной пирамиды най-

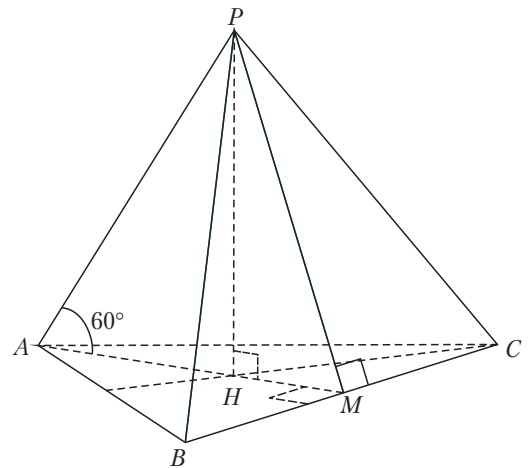
дем по формуле $S_{\text{бок}} = \frac{1}{2} \cdot P_{\text{осн}} \cdot h_a$, где $h_a = PM = \frac{4\sqrt{39}}{3}$. Тогда $S_{\text{бок}} = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 8 \cdot \frac{4\sqrt{39}}{3} = 16\sqrt{39}$.

4) Из прямоугольного треугольника по теореме Пифагора найдем

$$PM^2 = PH^2 + HM^2, \quad PM = \sqrt{8^2 + \left(\frac{4\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \frac{4\sqrt{39}}{3}.$$

5) Объем пирамиды найдем по формуле $V = \frac{1}{3} S_{\text{осн}} \cdot h$, тогда $V = \frac{1}{3} \cdot 16\sqrt{3} \cdot 8 = \frac{128\sqrt{3}}{3} \neq 128\sqrt{3}$.

Ответ: 5.



Часть В

B1. $\frac{12 \cos 48^\circ - x \cos 48^\circ}{\cos 20^\circ \cos 28^\circ - \sin 20^\circ \sin 28^\circ} = \sin(-90^\circ).$

Вспользуемся формулой косинуса суммы $\cos 20^\circ \cos 28^\circ - \sin 20^\circ \sin 28^\circ = \cos(20^\circ + 28^\circ) = \cos 48^\circ$. Учтывая, что $\sin(-90^\circ) = -1$, получим $\frac{12 \cos 48^\circ - x \cos 48^\circ}{\cos 48^\circ} = -1$ или

$$12 \cos 48^\circ - x \cos 48^\circ = -\cos 48^\circ; \quad -x \cos 48^\circ = -13 \cos 48^\circ; \quad x = 13.$$

Ответ: 13.

B2. I способ.

Так как $\text{НОД}(68; x) = 4$, то число x кратно четырем, т. е. $x = 4n$; $n \in \mathbf{N}$. Разложим числа 68 и 1292 на простые множители: $68 = 2 \cdot 2 \cdot 17$; $1292 = 2 \cdot 2 \cdot 17 \cdot 19$. Поскольку $\text{НОК}(68; x) = 1292$, то среди простых множителей, на которые раскладывается число x , должно быть число 19, т. е. x кратно 19. Так как x кратно четырем и 19, то $x = 76$.

II способ.

Вспользуемся равенством $\text{НОК}(a; b) \cdot \text{НОД}(a; b) = ab$ и решим уравнение $4 \cdot 1292 = 68 \cdot x$; $x = 76$.

Ответ: 76.

B3. Функция $y = f(x)$ на промежутке, длина которого равна периоду, имеет четыре нуля. Так как промежуток $(-11; 13]$ содержит три периода, то на данном промежутке функция имеет 12 нулей.

Ответ: 12.

B4. $x^2 - 8x - \frac{3x - 12}{|x - 4|} + 18 \leq 0.$

Перейдем к равносильной совокупности:

$$\left[\begin{cases} x^2 - 8x - 3 + 18 \leq 0, \\ x > 4; \end{cases} \right] \left[\begin{cases} x^2 - 8x + 15 \leq 0, \\ x > 4; \end{cases} \right] \left[\begin{cases} (x - 3)(x - 5) \leq 0, \\ x > 4; \end{cases} \right]$$

$$\left[\begin{cases} x^2 - 8x + 3 + 18 \leq 0, \\ x < 4; \end{cases} \right] \left[\begin{cases} x^2 - 8x + 21 \leq 0, \\ x < 4; \end{cases} \right] \left[\begin{cases} x^2 - 8x + 21 \leq 0, \\ x < 4. \end{cases} \right]$$

Так как дискриминант квадратного трехчлена $x^2 - 8x + 21$ отрицательный, неравенство $x^2 - 8x + 21 \leq 0$ не имеет решений, т. е. вторая система не имеет решения.

Решим первую систему совокупности $\begin{cases} (x-3)(x-5) \leq 0, \\ x > 4; \end{cases} \quad \begin{cases} 3 \leq x \leq 5, \\ x > 4; \end{cases} \quad x \in (4; 5].$

Наибольшим целым решением неравенства является число 5.

Ответ: 5.

В5. $\begin{cases} x^2 - 4x - 2y - 1 = 0, \\ y^2 - 2x + 6y + 14 = 0. \end{cases}$ Сложим первое и второе уравнения системы и получим

$$x^2 - 4x - 2y - 1 + y^2 - 2x + 6y + 14 = 0; \quad x^2 - 6x + y^2 + 4y + 13 = 0; \quad x^2 - 6x + 9 + y^2 + 4y + 4 = 0;$$

$$(x-3)^2 + (y+2)^2 = 0.$$

Последнее равенство возможно только при $x = 3$ и $y = -2$.

С помощью проверки убедимся, что пара чисел $(3; -2)$ является решением данной системы уравнений. Таким образом, исходная система имеет единственное решение $(3; -2)$ и значение искомого выражения равно $3 + (-2) = 1$.

Ответ: 1.

В6. Пусть на участке растет x деревьев, тогда среди них $(0,96x)$ сосен и $(0,04x)$ других деревьев. После вырубки 150 сосен на участке осталось $(0,96x - 150)$ сосен и общее количество деревьев стало $(x - 150)$. Так как процентное содержание сосен стало 95 %, то составим и решим уравнение: $(0,96x - 150) = 0,95(x - 150)$;

$$0,96x - 150 = 0,95x - 142,5; \quad 0,01x = 7,5; \quad x = 750 \text{ — деревьев было на участке.}$$

$$750 - 150 = 600 \text{ — стало деревьев на участке;}$$

$$0,95 \cdot 600 = 570 \text{ — сосен осталось на участке.}$$

Ответ: 570.

ТЕСТ 17

Часть А

A1. Натуральные числа называются взаимно простыми, если единица является их единственным общим делителем. Взаимно простыми являются числа 25 и 32.

Ответ: 4.

A2. 1) $\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \pi - \arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4} \neq -\frac{\pi}{4}$;

2) $\arctg\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{\pi}{6} \neq \frac{\pi}{3}$;

3) $\arccos 0 = 1 \neq 0$;

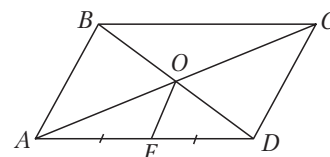
4) $\operatorname{arcctg}(-1) = \pi - \operatorname{arcctg} 1 = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4} \neq \frac{3\pi}{2}$;

5) $\arcsin(-1) = -\frac{\pi}{2}$.

Ответ: 3.

A3. Рассмотрим треугольник OEA . Так как медиана треугольника делит его на два равновеликих треугольника, то $S_{AOD} = 2S_{EOD} = 2 \cdot 3,25 = 6,5$.

Диагонали параллелограмма делят его на четыре равновеликих треугольника, значит, $S_{ABCD} = 4S_{AOD} = 4 \cdot 6,5 = 26$.



Ответ: 1.

A4. $\frac{5^{n+1} - 5^{n-1}}{2 \cdot 5^n} = \frac{5^n \cdot 5 - 5^n \cdot 5^{-1}}{2 \cdot 5^n} = \frac{5^n \cdot (5 - 5^{-1})}{2 \cdot 5^n} = \frac{5 - 5^{-1}}{2} = \frac{5\frac{4}{5}}{2} = \frac{12}{5} = 2\frac{2}{5}$.

Ответ: 2.

A5. Дуге с концами в точках $P_1\left(\frac{\pi}{4}\right)$ и $P_2\left(\frac{5\pi}{3}\right)$ принадлежат точки

$M_2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; $M_3\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$; $M_5(0; 1)$.

Ответ: 4.

A6. $(\sqrt[3]{625} + \sqrt[3]{5}) : \sqrt[3]{5} = \frac{\sqrt[3]{625} + \sqrt[3]{5}}{\sqrt[3]{5}} = \frac{\sqrt[3]{625}}{\sqrt[3]{5}} + \frac{\sqrt[3]{5}}{\sqrt[3]{5}} = \sqrt[3]{125} + 1 = 5 + 1 = 6$.

Ответ: 5.

A7. Найдем координаты вершины параболы $y = x^2 - 2x - 8$.

$$y = x^2 - 2x + 1 - 9; \quad y = (x - 1)^2 - 9.$$

Вершиной параболы является точка с координатами $(1; -9)$.

Так как искомая прямая параллельна оси абсцисс, то $y = -9$.

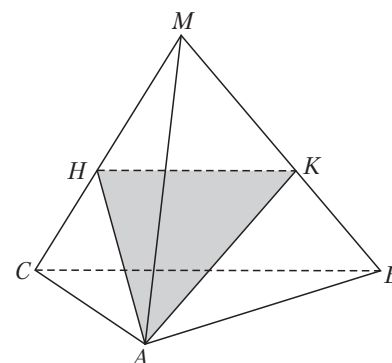
Ответ: 3.

A8. Так как HK — средняя линия треугольника CMB , то $HK = \frac{1}{2}BC = 3$.

Отрезки AH и AK являются медианами (а значит, и высотами) правильных треугольников ACM и AMB соответственно. Воспользуемся формулой

$h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ и получим $AH = AK = 3\sqrt{3}$.

Тогда $P_{AHK} = 3 + 6\sqrt{3}$.



Ответ: 4.

A9. Область определения функции $y = \sqrt[4]{x^2 - 5x + 6} + \frac{\sqrt[5]{x + 3}}{\sqrt{-x + 2}}$ совпадает с множеством решения системы неравенств

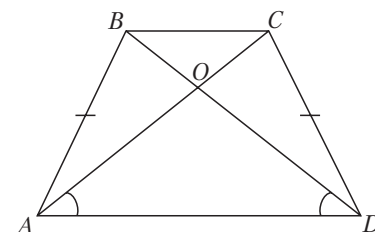
Ответ: 4.

Часть В

Ответ: 25.

Ответ: 1.

Ответ: 7.



Ответ: 50.

5) В треугольнике MAH $MH = 5\sqrt{3}$; $AH = 4\sqrt{3}$; $AM = \sqrt{33}$, поэтому по теореме косинусов найдем косинус угла AHM : $\cos \angle MHA = \frac{MH^2 + AH^2 - AM^2}{2 \cdot MH \cdot AH}$; $\cos \angle MHA = \frac{(5\sqrt{3})^2 + (4\sqrt{3})^2 - \sqrt{33}^2}{2 \cdot 5\sqrt{3} \cdot 4\sqrt{3}} = \frac{75 + 48 - 33}{2 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3} = \frac{3}{4}$.
 $x = \frac{3}{4}$, тогда $8x = 8 \cdot \frac{3}{4} = 6$.

Ответ: 6.

В6.
$$\begin{cases} 5x^2 - 4xy + 3y^2 + 18x - 16y + 25 = 0, \\ 10x^2 - 7xy + y^2 + 34x - 11y + 28 = 0. \end{cases}$$

Рассмотрим первое уравнение системы как квадратное относительно x :

$$\begin{aligned} 5x^2 - 4xy + 3y^2 + 18x - 16y + 25 &= 0; & 5x^2 - (4y - 18)x + 3y^2 - 16y + 25 &= 0; \\ D = (4y - 18)^2 - 4 \cdot 5 \cdot (3y^2 - 16y + 25) &= 16y^2 - 144y + 324 - 60y^2 + 320y - 500 = -44y^2 + 176y - 176 = \\ &= -44(y^2 - 4y + 4) = -44(y - 2)^2. \end{aligned}$$

Уравнение имеет решение, если $-44(y - 2)^2 \geq 0$, т. е. $y = 2$.

Тогда исходная система равносильна системе

$$\begin{cases} y = 2, \\ 10x^2 - 7xy + y^2 + 34x - 11y + 28 = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} y = 2, \\ 10x^2 + 20x + 10 = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} y = 2, \\ (x + 1)^2 = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} y = 2, \\ x = -1. \end{cases}$$

Найдем значение искомого выражения: $x_0 y_0 = -1 \cdot 2 = -2$.

Ответ: -2.

ТЕСТ 18

Часть А

A1. Натуральные числа называются взаимно простыми, если у них нет других общих делителей, кроме единицы. Числа 25 и 8 — взаимно простые.

Ответ: 4.

A2. Верным является равенство под номером пять, так как $\sqrt[3]{16} - \sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{8 \cdot 2} - \sqrt[3]{2} = 2\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{2}$.

Ответ: 5.

$$\text{A3. } \frac{7\pi}{\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) + \arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)} = \frac{7\pi}{-\arcsin\frac{1}{2} + \pi - \arccos\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{7\pi}{-\frac{\pi}{6} + \pi - \frac{\pi}{4}} = \frac{7\pi}{\frac{-2\pi + 12\pi - 3\pi}{12}} = \frac{12 \cdot 7\pi}{7\pi} = 12.$$

Ответ: 4.

A4. Найдем область определения каждой из предложенных функций:

$$1) y = \sqrt{x^2 + x - 6}; \quad x^2 + x - 6 \geq 0; \quad (x+3)(x-2) \geq 0; \quad x \in (-\infty; -3] \cup [2; +\infty); \quad D(y) = (-\infty; -3] \cup [2; +\infty);$$

$$2) y = \sqrt{\frac{x+3}{x-2}}; \quad \frac{x+3}{x-2} \geq 0; \quad x \in (-\infty; -3] \cup (2; +\infty); \quad D(y) = (-\infty; -3] \cup (2; +\infty);$$

$$3) y = \sqrt[3]{x^2 + x - 6}; \quad x \in (-\infty; +\infty); \quad D(y) = (-\infty; +\infty);$$

$$4) y = \frac{1}{\sqrt[4]{x^2 + x - 6}}; \quad x^2 + x - 6 > 0; \quad (x+3)(x-2) > 0; \quad x \in (-\infty; -3) \cup (2; +\infty); \quad D(y) = (-\infty; -3) \cup (2; +\infty);$$

$$5) y = \frac{1}{x+3} + \frac{1}{x-2}; \quad \begin{cases} x \neq -3, \\ x \neq 2; \end{cases} \quad D(y) = (-\infty; -3) \cup (-3; 2) \cup (2; +\infty).$$

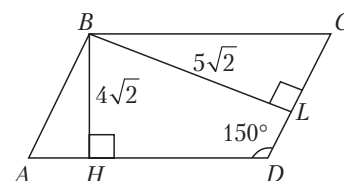
Ответ: 4.

A5. 1) По свойству параллелограмма $\angle A + \angle D = 180^\circ$; $\angle A = 30^\circ$.

2) В прямоугольном треугольнике ABH катет BH лежит против угла в 30° , тогда $AB = 2 \cdot BH = 8\sqrt{2}$.

$$3) CD = AB = 8\sqrt{2}, \text{ тогда } S_{ABCD} = CD \cdot BL; \quad S_{ABCD} = 8\sqrt{2} \cdot 5\sqrt{2} = 80.$$

Ответ: 1.



A6. Пусть $a_1 = 217$, тогда $a_{12} = 305$. Поскольку $a_{12} = a_1 + 11d$, то

$$d = \frac{a_{12} - a_1}{11} = \frac{305 - 217}{11} = 8.$$

По формуле $a_5 = a_1 + 4d$ найдем: $a_5 = 217 + 4 \cdot 8 = 249$.

Ответ: 3.

$$\text{A7. } \frac{a^{-6} + a^{-4} + a^{-2}}{a^2 + a^4 + a^6} = \frac{a^{-6}(1 + a^2 + a^4)}{a^2(1 + a^2 + a^4)} = \frac{a^{-6}}{a^2} = a^{-8}.$$

Ответ: 2.

$$\text{A8. } \frac{x^4 - 625}{25 - x^2} = -(8x + 90); \quad \frac{(x^2 - 25)(x^2 + 25)}{25 - x^2} = -(8x + 90); \quad \begin{cases} -(x^2 + 25) = -(8x + 90), \\ x \neq \pm 5; \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 - 8x - 65 = 0, \\ x \neq \pm 5; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 13, \\ x = -5; \quad x = 13. \\ x \neq \pm 5; \end{cases}$$

Ответ: 3.

A9. Прямоугольники AA_1C_1C и BB_1D_1D — диагональные сечения параллелепипеда. Тогда

$$S_{AA_1C_1C} = AC \cdot AA_1 = AC \cdot h = 3 \text{ и } S_{BB_1D_1D} = BD \cdot DD_1 = BD \cdot h = 6. \text{ То есть } AC = \frac{3}{h}; \quad BD = \frac{6}{h}.$$

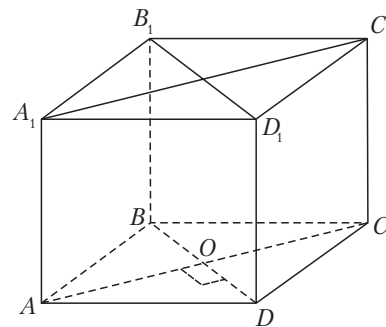
Поскольку площадь ромба равна полупроизведению его диагоналей, то

$$S_{ABCD} = \frac{AC \cdot BD}{2} = \frac{3 \cdot 6}{2 \cdot h^2} = \frac{9}{h^2}.$$

По условию $S_{ABCD} = 1$, т. е. $\frac{9}{h^2} = 1$; $h = 3$.

$$V_{ABCD A_1 B_1 C_1 D_1} = S_{ABCD} \cdot h = 3.$$

Ответ: 5.



Часть В

$$\begin{aligned} \text{В1. } 64^{\frac{1}{2}} \cdot \left(3\frac{3}{8}\right)^{-\frac{2}{3}} \cdot \sqrt{324} + \frac{\sqrt[3]{256} \cdot \sqrt{-27}}{4^{\frac{1}{3}} \cdot 3^{-0.4}} &= 8 \cdot \left(\frac{27}{8}\right)^{-\frac{2}{3}} \cdot 18 + \frac{4\sqrt[3]{4} \cdot (-\sqrt[5]{3^3})}{4^{\frac{1}{3}} \cdot 3^{-0.4}} = 8 \cdot \left(\frac{8}{27}\right)^{\frac{2}{3}} \cdot 18 + \frac{4 \cdot (-3^{0.6})}{3^{-0.4}} = \\ &= 8 \cdot \frac{4}{9} \cdot 18 - 4 \cdot 3^{0.6 - (-0.4)} = 8 \cdot 4 \cdot 2 - 4 \cdot 3 = 52. \end{aligned}$$

Ответ: 52.

В2. Найдем нули выражения $(|x+1|-3)(|x-2|-5)$.

$$(|x+1|-3)(|x-2|-5) = 0; \quad \begin{cases} |x+1|-3=0, \\ |x-2|-5=0; \end{cases} \quad \begin{cases} |x+1|=3, \\ |x-2|=5; \end{cases} \quad \begin{cases} x+1=3, \\ x+1=-3, \\ x-2=5, \\ x-2=-5; \end{cases} \quad \begin{cases} x=2, \\ x=-4, \\ x=7, \\ x=-3. \end{cases}$$

Для решения неравенства $(|x+1|-3)(|x-2|-5) < 0$ воспользуемся методом интервалов:

$$\begin{array}{ccccccc} + & & - & & + & & - \\ | & & | & & | & & | \\ -4 & -3 & 2 & 7 & & & \end{array} \quad x \in (-4; -3) \cup (2; 7).$$

Сумма целых решений данного неравенства равна $3 + 4 + 5 + 6 = 18$.

Ответ: 18.

В3. 1) Найдем радиус окружности, описанной около равнобедренного треугольника ABC : $2\pi R = 20\pi$; $R = 10$.

2) По теореме синусов найдем синус угла B : $\sin \angle B = \frac{AC}{2R}$; $\sin \angle B = \frac{12}{20} = \frac{3}{5}$.

3) Воспользуемся основным тригонометрическим тождеством и получим:

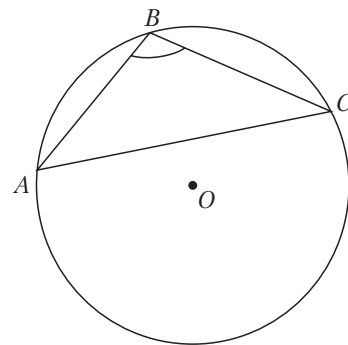
$$\cos^2 \angle B = 1 - \sin^2 \angle B; \quad \cos \angle B = \pm \frac{4}{5}.$$

Так как треугольник ABC — тупоугольный, то $\cos \angle B = -\frac{4}{5}$.

4) По теореме косинусов $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2 \cdot AB \cdot BC \cdot \cos \angle B$. Пусть $AB = BC = a$, тогда $12^2 = a^2 + a^2 - 2 \cdot a \cdot a \cdot \left(-\frac{4}{5}\right)$; $a^2 = 40$.

$$5) S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot BC \cdot \sin \angle B = \frac{1}{2} \cdot a^2 \cdot \sin \angle B = \frac{1}{2} \cdot 40 \cdot \frac{3}{5} = 12.$$

Ответ: 12.



$$\text{В4. } \frac{1 + \cos x}{\operatorname{tg} \frac{x}{3}} = 0; \quad \begin{cases} 1 + \cos x = 0, \\ \operatorname{tg} \frac{x}{3} \neq 0; \end{cases} \quad \begin{cases} \cos x = -1, \\ \operatorname{tg} \frac{x}{3} \neq 0. \end{cases}$$

Решим первое уравнение системы: $\cos x = -1$; $x = \pi + 2\pi n$; $n \in \mathbb{N}$.

Промежутку $[0; 9\pi]$ принадлежат корни π ; 3π ; 5π ; 7π ; 9π .

При $x = \pi$ $\operatorname{tg} \frac{\pi}{3} \neq 0$.

При $x = 3\pi$ $\operatorname{tg} \frac{3\pi}{3} = \operatorname{tg} \pi = 0$.

При $x = 5\pi$ $\operatorname{tg} \frac{5\pi}{3} \neq 0$.

При $x = 7\pi$ $\operatorname{tg} \frac{7\pi}{3} \neq 0$.

При $x = 9\pi$ $\operatorname{tg} \frac{9\pi}{3} = \operatorname{tg} 3\pi = 0$.

Таким образом, три корня уравнения $\frac{1 + \cos x}{\operatorname{tg} \frac{x}{3}} = 0$ принадлежат промежутку $[0; 9\pi]$.

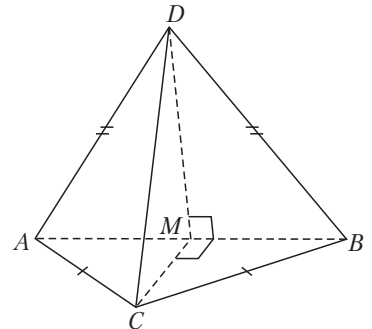
Ответ: 3.

B5. 1) Пусть M — середина стороны AB . Так как треугольник ABC — равнобедренный и CM — медиана, проведенная к основанию, то CM — высота. Аналогично доказывается, что DM — высота треугольника ADB .

2) $AB \perp CM$, $AB \perp DM$, $\{CM; DM\} \subset (DCM)$, тогда $AB \perp (CMD)$ (по признаку перпендикулярности прямой и плоскости).

3) $AB \perp (CMD)$; $DC \subset (CMD)$, тогда $AB \perp CD$, т. е. угол между ребрами AB и CD равен 90° .

Ответ: 90.



B6. Пусть v — скорость автомобиля по грунтовой дороге, тогда $1,125v$ — скорость автомобиля по шоссе.

Пусть t — время движения автомобиля по шоссе, тогда $0,9t$ — время движения автомобиля по грунтовой дороге.

$s_1 = 1,125v \cdot t$ — путь, который прошел автомобиль по шоссе.

$s_2 = v \cdot 0,9t$ — путь, который прошел автомобиль по грунтовой дороге.

Найдем, на сколько процентов больший путь автомобиль проехал по шоссе, чем по грунтовой дороге:

$$\frac{s_1 - s_2}{s_2} \cdot 100 \% = \frac{1,125v \cdot t - v \cdot 0,9t}{v \cdot 0,9t} \cdot 100 \% = \frac{0,225v \cdot t}{0,9v \cdot t} \cdot 100 \% = 25 \%$$

Ответ: 25.

Часть А

Ответ: 4.

Ответ: 4.

Ответ: 3.

Ответ: 4.

Ответ: 1.

Ответ: 2.

Ответ: 3.

64

То есть $\begin{cases} \sqrt[5]{2y} = -4, \\ \sqrt[5]{2y} = 3; \end{cases} \begin{cases} 2y = -4^5, \\ 2y = 3^5; \end{cases} \begin{cases} y = -2^9, \\ y = \frac{3^5}{2}. \end{cases}$

Найдем произведение корней уравнения

$$-2^9 \cdot \frac{3^5}{2} = -2^8 \cdot 3^5 = -256 \cdot 243 = -62\,208.$$

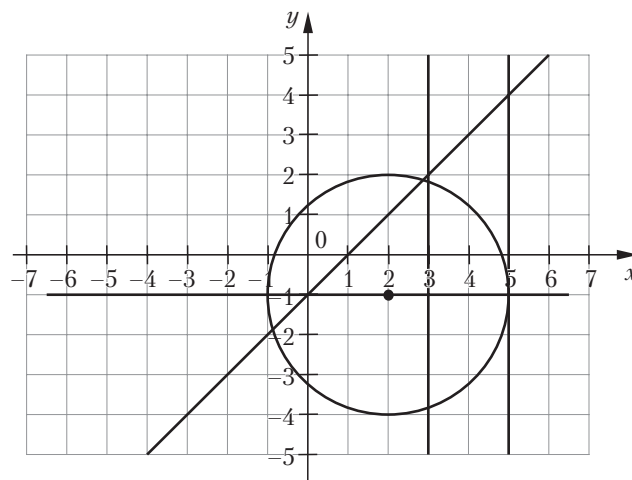
Ответ: 5.

A9. Изобразим графики всех предложенных линий на координатной плоскости и получим, что прямая $x = 5$ является касательной для окружности

$$(x-2)^2 + (y+1)^2 = 9.$$

Выполним необходимую проверку и убедимся, что прямая $x = 5$ и окружность $(x-2)^2 + (y+1)^2 = 9$ имеют только одну общую точку $(5; -1)$.

Ответ: 2.



Часть В

B1. $\begin{cases} \frac{y+x}{y-x} + 5 \frac{y-x}{x+y} = 6, \\ x^2 + y^2 = 13. \end{cases}$ Рассмотрим первое уравнение системы.

Пусть $\frac{y+x}{y-x} = t$, тогда уравнение принимает вид $t + \frac{5}{t} = 6$; $t^2 - 6t + 5 = 0$; $\begin{cases} t = 1, \\ t = 5. \end{cases}$ То есть $\begin{cases} \frac{y+x}{y-x} = 1, \\ \frac{y+x}{y-x} = 5; \end{cases} \begin{cases} x = 0, \\ y = \frac{3x}{2}. \end{cases}$

Исходная система принимает вид $\begin{cases} \begin{cases} x = 0, \\ y = \frac{3x}{2}; \\ x^2 + y^2 = 13; \end{cases} \begin{cases} x = 0, \\ x^2 + y^2 = 13; \\ y = \frac{3x}{2}, \\ x^2 + y^2 = 13; \end{cases} \begin{cases} x = 0, \\ y^2 = 13; \\ y = \frac{3x}{2}, \\ x^2 = 4; \end{cases} \begin{cases} x = 0, \\ y = \pm\sqrt{13}; \\ x = 2, \\ y = 3; \\ x = -2, \\ y = -3. \end{cases}$

Тогда $n = 4$; $S = 2 + 3 = 5$ и $n \cdot S = 20$.

Ответ: 20.

B2. Так как четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность, то $\angle B + \angle D = 180^\circ$.

Применим теорему косинусов в треугольниках ABC и ACD и получим $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2 \cdot AB \cdot BC \cdot \cos \angle B$

$$\text{и } AC^2 = AD^2 + DC^2 - 2 \cdot AD \cdot DC \cdot \cos \angle D = AD^2 + DC^2 - 2 \cdot AD \cdot DC \cdot \cos(180^\circ - \angle B) =$$

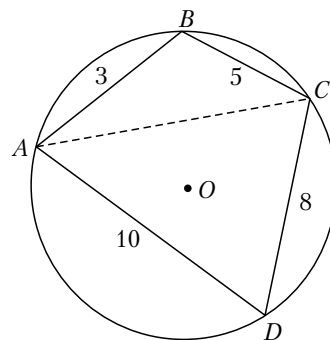
$$= AD^2 + DC^2 + 2 \cdot AD \cdot DC \cdot \cos \angle B.$$

$$\text{То есть } AB^2 + BC^2 - 2 \cdot AB \cdot BC \cdot \cos \angle B = AD^2 + DC^2 + 2 \cdot AD \cdot DC \cdot \cos \angle B;$$

$$9 + 25 - 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cos \angle B = 100 + 64 + 2 \cdot 10 \cdot 8 \cdot \cos \angle B; \quad \cos \angle B = -\frac{13}{19}.$$

Воспользуемся основным тригонометрическим тождеством и получим

$$\sin \angle B = \sin \angle D = \sqrt{1 - \cos^2 \angle B} = \frac{8\sqrt{3}}{19}.$$



Тогда $S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot BC \cdot \sin \angle B = \frac{60\sqrt{3}}{19}$; $S_{DBC} = \frac{1}{2} \cdot AD \cdot DC \cdot \sin \angle D = \frac{320\sqrt{3}}{19}$
 и $S_{ABCD} = S_{ABC} + S_{BCD} = \frac{60\sqrt{3}}{19} + \frac{320\sqrt{3}}{19} = \frac{380\sqrt{3}}{19} = 20\sqrt{3}$.
 Значение искомого выражения равно $\frac{S}{2\sqrt{3}} = \frac{20\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = 10$.

Ответ: 10.

B3. Запишем функцию $y = \frac{39}{x^2 - 4x + 17}$ в виде $y = \frac{39}{(x-2)^2 + 13}$.

Наименьшее значение знаменателя дроби равно 13, тогда наибольшее значение дроби равно $\frac{39}{13} = 3$.

Ответ: 3.

B4. $\sqrt{\sin x} = \sqrt[4]{\cos x + \frac{1}{4}}$; $\begin{cases} \sin^2 x = \cos x + \frac{1}{4}, \\ \sin x \geq 0; \end{cases} \begin{cases} 1 - \cos^2 x = \cos x + \frac{1}{4}, \\ \sin x \geq 0; \end{cases} \begin{cases} \cos^2 x + \cos x - \frac{3}{4} = 0, \\ \sin x \geq 0; \end{cases}$
 $\begin{cases} \cos x = -\frac{3}{2}, \\ \cos x = \frac{1}{2}; \\ \sin x \geq 0; \end{cases} \begin{cases} \cos x = \frac{1}{2}, \\ \sin x \geq 0; \end{cases} \begin{cases} x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbf{Z}, \\ \sin x \geq 0; \end{cases} \quad x = \frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbf{Z}.$

Найдем сумму корней исходного уравнения, принадлежащих промежутку $\left[\frac{\pi}{4}; 5\pi\right]$:

$$\frac{\pi}{3} + \left(\frac{\pi}{3} + 2\pi\right) + \left(\frac{\pi}{3} + 4\pi\right) = 7\pi = 7 \cdot 180^\circ = 1260^\circ.$$

Ответ: 1260.

B5. Рассмотрим уравнение $x^2 - \pi x \sin x + \frac{1}{4}\pi^2 = 0$ как квадратное относительно x .

Тогда $D = \pi^2 \sin^2 x - 4 \cdot 1 \cdot \frac{1}{4}\pi^2 = \pi^2 \sin^2 x - \pi^2 = \pi^2 (\sin^2 x - 1)$.

Уравнение имеет корни, если $D \geq 0$, т. е. $\pi^2 (\sin^2 x - 1) \geq 0$; $\sin^2 x \geq 1$.

Полученное неравенство равносильно уравнению $\sin^2 x = 1$; $\sin x = \pm 1$.

При $\sin x = 1$ получим $x^2 - \pi x + \frac{1}{4}\pi^2 = 0$; $\left(x - \frac{1}{2}\pi\right)^2 = 0$; $x = \frac{\pi}{2}$ $\left(\sin \frac{\pi}{2} = 1\right)$.

При $\sin x = -1$ получим $x^2 + \pi x + \frac{1}{4}\pi^2 = 0$; $\left(x + \frac{1}{2}\pi\right)^2 = 0$; $x = -\frac{\pi}{2}$ $\left(\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1\right)$.

Найдем разность наибольшего и наименьшего корней уравнения: $\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi = 180^\circ$.

Ответ: 180.

B6.

	Первый день	Второй день
Количество присутствующих	x	$x+1$
Количество отсутствующих	$\frac{x}{13}$	$\frac{x}{13} - 1$

Так как на второй день количество отсутствовавших составило 5 % от количества присутствовавших, то $\frac{x}{13} - 1 = \frac{1}{20}(x+1)$; $20\left(\frac{x}{13} - 1\right) = x+1$; $\frac{7x}{13} = 21$; $x = 39$. Тогда в классе $x + \frac{x}{13} = 39 + 3 = 42$ ученика.

Ответ: 42.

ТЕСТ 20

Часть А

A1. Возрастающей геометрической прогрессией является последовательность 1; 4; 16; 64;

Ответ: 4.

A2. Так как график обратной пропорциональности $y = \frac{k}{x}$ расположен во второй и четвертой координатных четвертях, то $k < 0$. Определим, какое из предложенных чисел является отрицательным:

1) $\sqrt[6]{(1-\sqrt{7})^6} = |1-\sqrt{7}| > 0$;

2) $3^{-1} = \frac{1}{3} > 0$;

3) $-5^6 < 0$;

4) $19,1 - \sqrt{361} = 19,1 - 19 > 0$;

5) $\cos \frac{48\pi}{25} = \cos \left(2\pi - \frac{2\pi}{25} \right) = \cos \frac{2\pi}{25} > 0$.

Ответ: 3.

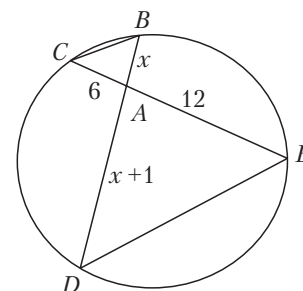
A3. $\frac{1}{5}\sqrt{300} - \frac{2}{3}\sqrt{27} + \sqrt{75} = \frac{1}{5} \cdot 10\sqrt{3} - \frac{2}{3} \cdot 3\sqrt{3} + 5\sqrt{3} = 2\sqrt{3} - 2\sqrt{3} + 5\sqrt{3} = 5\sqrt{3}$.

Ответ: 5.

A4. По теореме об отрезках пересекающихся хорд $AC \cdot AE = AD \cdot AB$; $6 \cdot 12 = x(x+1)$;

$x^2 + x - 72 = 0$; $\begin{cases} x = -9, \\ x = 8. \end{cases}$ То есть $AB = 8$, тогда $AD = 9$ и $BD = 8 + 9 = 17$.

Ответ: 4.



A5. $2\cos(\pi(x-1)) = \sqrt{3}$; $\cos(\pi(x-1)) = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $\pi(x-1) = \pm \frac{\pi}{6} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$;

$$x-1 = \pm \frac{1}{6} + 2n, \quad n \in \mathbb{Z}; \quad \begin{cases} x = 1 + \frac{1}{6} + 2n, \\ x = 1 - \frac{1}{6} + 2n, \end{cases} \quad n \in \mathbb{Z}; \quad \begin{cases} x = \frac{7}{6} + 2n, \\ x = \frac{5}{6} + 2n, \end{cases} \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Наибольшим отрицательным корнем уравнения является число $-\frac{5}{6}$.

Ответ: 3.

A6. Пусть $\frac{xy}{2} = a$; $2x + y - xy = b$. Тогда система принимает вид

$$\begin{cases} a + \frac{5}{b} = 5, \\ b + \frac{5}{a} = 4; \end{cases} \begin{cases} \frac{ab+5}{b} = 5, \\ \frac{ab+5}{a} = 4; \end{cases} \begin{cases} ab+5 = 5b, \\ ab+5 = 4a; \end{cases} \begin{cases} 4a = 5b, \\ ab+5 = 4a; \end{cases} \begin{cases} b = \frac{4a}{5}, \\ ab+5 = 4a; \end{cases} \begin{cases} b = \frac{4a}{5}, \\ \frac{4a^2}{5} + 5 = 4a; \end{cases}$$

$$\begin{cases} b = \frac{4a}{5}, \\ 4a^2 - 20a + 25 = 0; \end{cases} \begin{cases} b = \frac{4a}{5}, \\ (2a-5)^2 = 0; \end{cases} \begin{cases} b = \frac{4a}{5}, \\ a = 2,5; \end{cases} \begin{cases} b = 2, \\ a = 2,5. \end{cases}$$

$$\text{Получим } \begin{cases} 2x + y - xy = 2, \\ \frac{xy}{2} = 2,5; \end{cases} \quad \begin{cases} 2x + y - xy = 2, \\ xy = 5; \end{cases} \quad \begin{cases} 2x + y - 5 = 2, \\ xy = 5; \end{cases} \quad \begin{cases} 2x + y = 7, \\ xy = 5; \end{cases} \quad \begin{cases} y = 7 - 2x, \\ xy = 5; \end{cases} \quad \begin{cases} y = 7 - 2x, \\ x(7 - 2x) = 5; \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 7 - 2x, \\ 2x^2 - 7x + 5 = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} y = 7 - 2x; \\ \begin{cases} x = 1, \\ x = 2,5; \end{cases} \end{cases} \quad \begin{cases} \begin{cases} x = 1, \\ y = 5; \end{cases} \\ \begin{cases} x = 2,5, \\ y = 2. \end{cases} \end{cases}$$

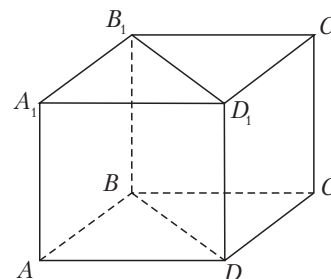
Ответ: 1.

A7. Пусть a — длина ребра куба, тогда $BD = a\sqrt{2}$ (BD — диагональ квадрата $ABCD$).

$$S_{BB_1D_1D} = BD \cdot BB_1; \quad a \cdot a\sqrt{2} = 18\sqrt{2}; \quad a = 3\sqrt{2}.$$

$$V_{ABCD A_1 B_1 C_1 D_1} = a^3; \quad V_{ABCD A_1 B_1 C_1 D_1} = (3\sqrt{2})^3 = 54\sqrt{2}.$$

Ответ: 1.



A8. Так как $\operatorname{ctg} \alpha = 4$; $\operatorname{ctg} \beta = \frac{5}{3}$, то $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{4}$; $\operatorname{tg} \beta = \frac{3}{5}$. Найдем

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta} = \frac{\frac{1}{4} + \frac{3}{5}}{1 - \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{5}} = \frac{\frac{17}{20}}{\frac{17}{20}} = 1.$$

Так как α и β — острые углы, то $\alpha + \beta = 45^\circ$. Тогда $\sin(\alpha + \beta) = \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Ответ: 4.

A9. Найдем область определения функции $f(x) = \frac{2x+7}{x+2+\sqrt{2x+7}}$.

Найдем значения переменной, при которых знаменатель обращается в нуль:

$$\sqrt{2x+7} = -x-2; \quad \begin{cases} 2x+7 = (x+2)^2, \\ -x-2 \geq 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x^2+2x-3=0, \\ x \leq -2; \end{cases} \quad \begin{cases} x = -3, \\ x = 1; \\ x \leq -2; \end{cases} \quad x = -3.$$

То есть при $x = -3$ выражение $\frac{2x+7}{x+2+\sqrt{2x+7}}$ не имеет смысла.

Кроме того, функция определена при $x \geq -3,5$.

Таким образом, $D(f) = [-3,5; -3) \cup (-3; +\infty)$.

Ответ: 4.

Часть В

B1. 1) $8 \cdot 0,875 = 7$ (ч) — время, за которое второй велосипедист проезжает расстояние между городами.

2) Пусть s км — расстояние между городами, тогда $\frac{s}{8}$ км/ч и $\frac{s}{7}$ км/ч — скорости первого и второго велосипедистов соответственно.

3) $\frac{s}{8} + \frac{s}{7} = \frac{15s}{56}$ (км/ч) — скорость сближения велосипедистов.

4) Найдем, через какое время велосипедисты встретятся: $s : \frac{15s}{56} = \frac{56}{15}$ ч = $\frac{56}{15} \cdot 60 = 224$ мин.

Ответ: 224.

B2. $x^2 - 4x - 6 = \sqrt{2x^2 - 8x + 12}$. Пусть $t = \sqrt{2x^2 - 8x + 12}$, тогда

$$t^2 = 2x^2 - 8x + 12; \quad \frac{t^2}{2} = x^2 - 4x + 6; \quad \frac{t^2}{2} - 12 = x^2 - 4x - 6.$$

Исходное уравнение принимает вид $\frac{t^2}{2} - 12 = t$; $t^2 - 2t - 24 = 0$; $\begin{cases} t = 6, \\ t = -4. \end{cases}$ Так как $t \geq 0$, то $t = 6$, т. е.

$$\sqrt{2x^2 - 8x + 12} = 6; \quad 2x^2 - 8x + 12 = 36; \quad 2x^2 - 8x - 24 = 0; \quad x^2 - 4x - 12 = 0; \quad D > 0.$$

Тогда произведение корней уравнения равно -12 .

Ответ: -12 .

В3. $\left| \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 - 4x + 4} \right| + \left| \frac{x-1}{2-x} \right| < 12$; $\left(\left| \frac{x-1}{x-2} \right| \right)^2 + \left| \frac{x-1}{x-2} \right| - 12 < 0$.

Пусть $t = \left| \frac{x-1}{x-2} \right|$, тогда исходное неравенство принимает вид $t^2 + t - 12 < 0$; $-4 < t < 3$, т. е.

$$-4 < \left| \frac{x-1}{x-2} \right| < 3; \quad \left| \frac{x-1}{x-2} \right| < 3; \quad \begin{cases} \frac{x-1}{x-2} < 3, \\ \frac{x-1}{x-2} > -3; \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{5-2x}{x-2} < 0, \\ \frac{4x-7}{x-2} > 0; \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{2x-5}{x-2} > 0, \\ \frac{4x-7}{x-2} > 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x \in (-\infty; 2) \cup (2, 5; +\infty), \\ x \in (-\infty; 2) \cup (1, 75; +\infty); \end{cases}$$

$$x \in (-\infty; 2) \cup (2, 5; +\infty).$$

Промежутку $[0; 4]$ принадлежат корни 0; 1; 3; 4. Их сумма равна восьми.

Ответ: 8.

В4. Пусть $BC = a$, тогда $AC = 2a$; $CM = MB = \frac{a}{2}$; $PC = PA = a$.

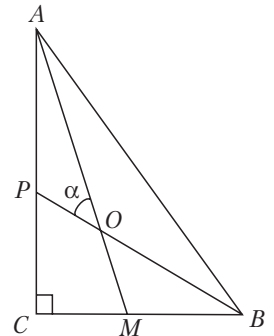
Тогда $\operatorname{tg} \angle CAM = \frac{CM}{AC} = \frac{0,5a}{2a} = \frac{1}{4}$.

В прямоугольном треугольнике BPC $BC = PC = a$, тогда $\operatorname{tg} \angle CPB = 1$.

В треугольнике APC угол CPB — внешний, т. е. $\angle CPB = \angle PAO + \angle POA$. Тогда

$$\operatorname{tg} \angle CPB = \operatorname{tg}(\angle PAO + \angle POA); \quad 1 = \frac{\operatorname{tg} \angle PAO + \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg} \angle PAO \operatorname{tg} \alpha}.$$

$$1 = \frac{\frac{1}{4} + \operatorname{tg} \alpha}{1 - \frac{\operatorname{tg} \alpha}{4}}; \quad 1 = \frac{1 + 4 \operatorname{tg} \alpha}{4 - \operatorname{tg} \alpha}; \quad 4 - \operatorname{tg} \alpha = 1 + 4 \operatorname{tg} \alpha; \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{3}{5}. \quad \text{Тогда } 10 \operatorname{tg} \alpha = 10 \cdot \frac{3}{5} = 6.$$



Ответ: 6.

В5. Так как все плоские углы пирамиды при вершине S прямые, то $SC \perp (ASB)$ и $SA \perp (CSB)$. То есть треугольники ASB и SBC — ортогональные проекции основания ABC .

Пусть α и β — величины двугранных углов при ребрах AB и BC соответственно.

Тогда $S_{ASB} = S_{ABC} \cdot \cos \alpha$; $S_{CSB} = S_{ABC} \cdot \cos \beta$.

Откуда $\frac{S_{ASB}}{S_{CSB}} = \frac{\cos \alpha}{\cos \beta}$.

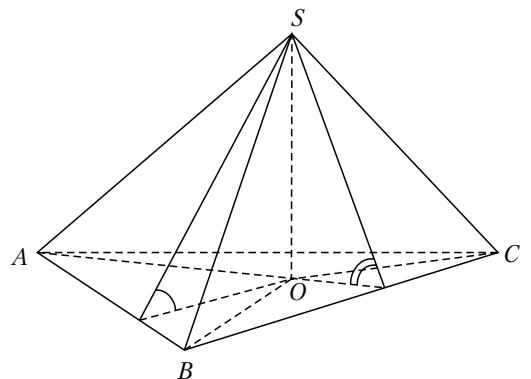
С другой стороны, треугольники AOB и BOC являются ортогональными проекциями граней ASB и SBC соответственно.

То есть $S_{AOB} = S_{SAB} \cdot \cos \alpha$; $S_{COB} = S_{SBC} \cdot \cos \beta$. Тогда

$$\frac{S_{AOB}}{S_{COB}} = \frac{S_{SAB} \cdot \cos \alpha}{S_{SBC} \cdot \cos \beta}.$$

Но $\frac{S_{ASB}}{S_{CSB}} = \frac{\cos \alpha}{\cos \beta}$, а $\frac{S_{AOB}}{S_{COB}} = 49$.

Тогда получим: $\left(\frac{\cos \alpha}{\cos \beta} \right)^2 = 49$; $\frac{\cos \alpha}{\cos \beta} = 7$. То есть $\frac{S_{ASB}}{S_{CSB}} = 7$.



Ответ: 7.

В6. Представим функцию в виде

$$y = \sqrt{1^2 + x^2 - 2 \cdot 1 \cdot x \cdot \frac{1}{2}} + \sqrt{1^2 + x^2 - 2 \cdot 1 \cdot x \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}$$

или

$$y = \sqrt{1^2 + x^2 - 2 \cdot 1 \cdot x \cdot \cos 60^\circ} + \sqrt{1^2 + x^2 - 2 \cdot 1 \cdot x \cdot \cos 30^\circ}.$$

Выражение $\sqrt{1^2 + x^2 - 2 \cdot 1 \cdot x \cdot \cos 60^\circ}$ можно рассматривать как длину стороны BC треугольника с двумя другими сторонами, равными $AB = 1$ и $AC = x$, причем угол между этими сторонами составляет 60° . Рассуждая аналогично, получим треугольник ACD , в котором

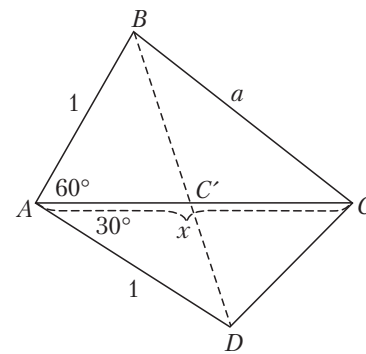
$$AC = x; AD = 1; \angle CAD = 30^\circ, \text{ а } CD = \sqrt{1^2 + x^2 - 2 \cdot 1 \cdot x \cdot \cos 30^\circ}.$$

Тогда сумму $\sqrt{1^2 + x^2 - 2 \cdot 1 \cdot x \cdot \cos 60^\circ} + \sqrt{1^2 + x^2 - 2 \cdot 1 \cdot x \cdot \cos 30^\circ}$ можно рассматривать как сумму длин отрезков BC и CD .

Очевидно, что сумма длин отрезков BC и CD будет наименьшей, если точки B , C и D будут лежать на одной прямой, т. е. $C \in BD$. Из прямоугольного равнобедренного треугольника ABD найдем длину отрезка AC' .

$$AC' = \frac{\sqrt{2}}{2 \cos 15^\circ} = \sqrt{3} - 1, \text{ т. е. } m = \sqrt{3} - 1, \text{ тогда значение искомого выражения равно } (\sqrt{3} + 1) \cdot (\sqrt{3} - 1) = 2.$$

Ответ: 2.



ТЕСТ 21

Часть А

A1. При $a > 2$ положительным является число $A = \frac{(5-a)^2}{a-1}$.

Ответ: 3.

A2. $\sqrt[3]{81} - \sqrt{49} \cdot \sqrt[3]{24} = 3\sqrt[3]{3} - 7 \cdot 2\sqrt[3]{8} = 3\sqrt[3]{3} - 14\sqrt[3]{8} = -11\sqrt[3]{3}$.

Ответ: 3.

A3. Так как акции предприятия разделены между акционерами A и B в отношении $9 : 11$, значит, у акционера A было $9x$, а у акционера B — $11x$ акций. После того как акционер A продал треть своих акций акционеру B , у него осталось $6x$ акций, а у акционера B стало $14x$ акций. Тогда отношение стало $6 : 14 = 3 : 7$.

Ответ: 1.

A4. $\frac{2a - \sqrt{a}}{1 - 2\sqrt{a}} = \frac{\sqrt{a}(2\sqrt{a} - 1)}{1 - 2\sqrt{a}} = -\sqrt{a}$.

Ответ: 4.

A5. Пусть a — длина стороны равностороннего треугольника, тогда его площадь равна $S_{\text{тр}} = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4}$.

Так как сторона треугольника равна диаметру круга, то радиус круга равен $r = \frac{a}{2}$. Тогда площадь круга равна $S_{\text{кр}} = \pi \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{\pi a^2}{4}$. $\frac{S_{\text{тр}}}{S_{\text{кр}}} = \frac{\frac{a^2 \sqrt{3}}{4}}{\frac{\pi a^2}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{\pi}$.

Ответ: 3.

A6. $\sin 3x \cdot \cos 2x = \sin 2x \cdot \cos 3x$; $\sin 3x \cdot \cos 2x - \sin 2x \cdot \cos 3x = 0$; $\sin x = 0$; $x = \pi n$; $n \in \mathbb{Z}$. Промежутку $[-\pi; \pi]$ принадлежат корни $-\pi$; 0 ; π . Их сумма равна нулю.

Ответ: 2.

A7. По формуле $\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$ составим уравнение прямой, проходящей через точки $A(0; 1)$ и $B(3; 0)$.

$\frac{x - 0}{3 - 0} = \frac{y - 1}{0 - 1}$; $\frac{x}{3} = -(y - 1)$; $y = -\frac{x}{3} + 1$. Угловой коэффициент этой прямой равен $k = -\frac{1}{3}$.

Ответ: 1.

A8. Так как дискриминант квадратного трехчлена $-9x^2 - 15x + 11$ положителен, то график функции $y = -9x^2 - 15x + 11$ пересекает ось абсцисс в двух точках. Поскольку $y(-3) < 0$; $y(-1) > 0$, а $y(1) < 0$, то $x_1 < -1$, а $x_2 < 2$.

Ответ: 5.

A9. $\frac{|x-1|}{3-x} \geq \frac{|1-x|}{3-2x}$; $\frac{|x-1|}{3-x} \geq \frac{|x-1|}{3-2x}$; $\frac{|x-1|}{3-x} - \frac{|x-1|}{3-2x} \geq 0$; $|x-1| \left(\frac{1}{3-x} - \frac{1}{3-2x} \right) \geq 0$;

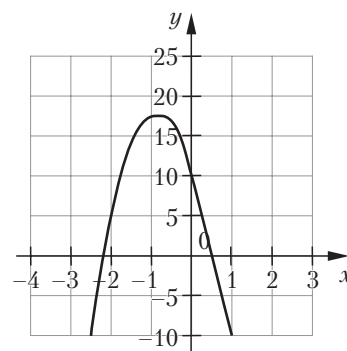
$|x-1| \left(\frac{3-2x-3+x}{(3-x)(3-2x)} \right) \geq 0$; $|x-1| \frac{-x}{(3-x)(3-2x)} \geq 0$; $\frac{|x-1|x}{(x-3)(3-2x)} \geq 0$.

Воспользуемся методом интервалов и получим

$\begin{array}{ccccccc} + & - & - & + & - \\ \bullet & \bullet & \circ & \circ & \rightarrow \end{array} \quad x \in (-\infty; 0] \cup \{1\} \cup (1,5; 3).$

Среднее арифметическое целых неотрицательных решений неравенства равно $\frac{0+1+2}{3} = 1$.

Ответ: 3.



B1. $(7^{x-3})^{\sqrt{28-2x}} = 7^{x^2-5x+6}$; $(x-3)\sqrt{28-2x} = x^2-5x+6$; $(x-3)\sqrt{28-2x} = (x-3)(x-2)$;

$$(x-3)(\sqrt{28-2x} - (x-2)) = 0; \begin{cases} x-3=0, \\ 28-2x \geq 0; \\ \sqrt{28-2x} = x-2; \end{cases} \begin{cases} x=3, \\ x \leq 14; \\ 28-2x = x^2-4x+4, \\ x \geq 2; \end{cases} \begin{cases} x=3; \\ x^2-2x-24=0, \\ x \geq 2; \end{cases} \begin{cases} x=3; \\ \begin{cases} x=6, \\ x=-4; \end{cases} \\ x \geq 2; \end{cases} \begin{cases} x=3, \\ x=6. \end{cases}$$

Сумма корней уравнения равна 9.

Ответ: 9.

B2. $y = \sin \frac{\pi x}{8} \cdot \sin \left(\frac{\pi x}{8} - \frac{\pi}{2} \right)$; $y = -\sin \frac{\pi x}{8} \cdot \sin \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi x}{8} \right)$; $y = -\sin \frac{\pi x}{8} \cdot \cos \frac{\pi x}{8}$; $y = -\frac{1}{2} \cdot 2 \sin \frac{\pi x}{8} \cdot \cos \frac{\pi x}{8}$;

$y = -\frac{1}{2} \sin \frac{\pi x}{4}$. Так как наименьший положительный период функции $y = \sin x$ равен 2π , то наименьший положительный период функции $y = -\frac{1}{2} \sin \frac{\pi x}{4}$ равен $\frac{2\pi}{\frac{\pi}{4}} = 8$.

Ответ: 8.

B3. Так как в арифметической прогрессии сумма любого числа первых членов равна утроенному квадрату числа этих членов, то верно равенство $S_n = 3n^2$. Тогда $a_7 = S_7 - S_6 = 3 \cdot (7^2 - 6^2) = 39$.

Ответ: 39.

B4. $y = (\sqrt{3})^{2-x^2+4x}$; $y = (\sqrt{3})^{-x^2+4x-4+6}$; $y = (\sqrt{3})^{-(x-2)^2+6}$. Так как $-(x-2)^2+6 \leq 6$ при $x \in \mathbf{R}$ и $\sqrt{3} > 1$, то $(\sqrt{3})^{-(x-2)^2+6} \leq (\sqrt{3})^6 = 27$. Наибольшим значением функции $y = (\sqrt{3})^{-(x-2)^2+6}$ является число 27.

Ответ: 27.

B5. Расстояние от вершины A_1 до плоскости, проходящей через вершины B_1 , D_1 и A , равно длине высоты пирамиды $A_1B_1D_1A$, основанием которой является равносторонний треугольник B_1D_1A .

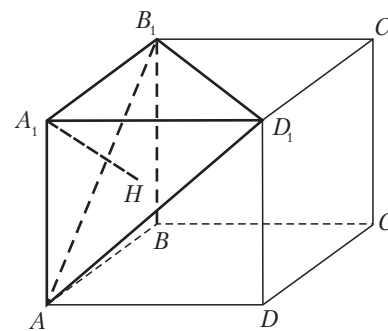
Найдем объем пирамиды $A_1B_1D_1A$, считая точку A ее вершиной, а треугольник $A_1B_1D_1$ ее основанием. Тогда

$$V_{A_1B_1D_1A} = \frac{1}{3} \cdot AA_1 \cdot \frac{1}{2} \cdot A_1B_1 \cdot A_1D_1; V_{A_1B_1D_1A} = \frac{1}{6} \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = \frac{9}{2}.$$

С другой стороны, $V_{A_1B_1D_1A} = \frac{1}{3} \cdot AH \cdot S_{AB_1D_1}$, причем

$$S_{AB_1D_1} = \frac{(AD_1)^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{(3\sqrt{2})^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{9\sqrt{3}}{2}.$$

Тогда $\frac{9}{2} = \frac{1}{3} \cdot AH \cdot \frac{9\sqrt{3}}{2}$; $AH = \sqrt{3}$; $AH^2 = 3$.



Ответ: 3.

B6. По свойству двух взаимно обратных чисел $\left| \sin(x-1) + \frac{1}{\sin(x-1)} \right| \geq 2$ при $x \neq \pi n + 1, n \in \mathbf{Z}$. Найдем множество значений функции: $y = \sqrt{5x - x^2 - 4}$; $y = \sqrt{-(x-2,5)^2 + 2,25}$; $0 \leq y \leq 1,5$. Заметим, что $\sqrt{5x - x^2 - 4} = 0$ при $x = 2,5$, но в этом случае $\left| \sin(x-1) + \frac{1}{\sin(x-1)} \right| > 2$. Таким образом, исходное неравенство верно при любых значениях переменной, удовлетворяющих системе неравенств $\begin{cases} x \neq \pi n + 1, n \in \mathbf{Z}, \\ -x^2 + 5x - 4 \geq 0; \end{cases} \begin{cases} x \neq \pi n + 1, n \in \mathbf{Z}, \\ x \in [1; 4]; \end{cases} x \in (1; 4]$.

Сумма целых решений неравенства равна: $2 + 3 + 4 = 9$.

Ответ: 9.

ТЕСТ 22

Часть А

A1. Так как $81 < 90 < 100$, то $9 < \sqrt{90} < 10$. Таким образом, числу $\sqrt{90}$ соответствует точка M .

Ответ: 4.

A2. Найдем 25 % от числа 72: $0,25 \cdot 72 = 18$.

Число 18 составляет 60 % от искомого числа. Найдем искомое число: $18 : 0,6 = 30$.

Ответ: 4.

A3.
$$\begin{cases} 2(x-1) - 3(x+4) \leq x, \\ 6x - 3 < -17 - (x-5); \end{cases} \begin{cases} 2x - 2 - 3x - 12 \leq x, \\ 6x - 3 < -17 - x + 5; \end{cases} \begin{cases} -2x \leq 14, \\ 7x < -9; \end{cases} \begin{cases} x \geq -7, \\ x < -1\frac{2}{7}; \end{cases} x \in \left[-7; -1\frac{2}{7}\right).$$

Наибольшим целым решением данного неравенства является число -2 .

Ответ: 3.

A4. Так как длина стороны ромба равна длине его меньшей диагонали, то треугольник ABC является равносторонним и $\angle B = 60^\circ$.

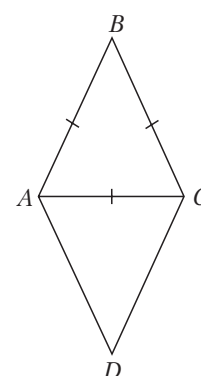
По формуле $S = a^2 \sin \alpha$ найдем площадь ромба: $S = 4^2 \cdot \sin 60^\circ = 16 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 8\sqrt{3}$.

Ответ: 1.

A5. График функции $y = 7 - 3x$ пересекает ось ординат в точке с координатами $(0; 7)$. Из предложенных функций через точку с координатами $(0; 7)$ проходит график функции

$$y = \frac{x}{2} + 7.$$

Ответ: 5.



A6. $x^3 + 2x^2\sqrt{5} + 2x^2 = -11x$; $x^3 + 2x^2\sqrt{5} + 2x^2 + 11x = 0$; $x(x^2 + 2x\sqrt{5} + 2x + 11) = 0$; $\begin{cases} x = 0, \\ x^2 + (2\sqrt{5} + 2)x + 11 = 0. \end{cases}$

Определим знак дискриминанта второго уравнения совокупности:

$$D = (2\sqrt{5} + 2)^2 - 4 \cdot 11 = 24 + 8\sqrt{5} - 44 = 8\sqrt{5} - 20 = \sqrt{320} - \sqrt{400} < 0,$$

т. е. второе уравнение совокупности не имеет корней, значит, исходное уравнение имеет один корень.

Ответ: 1.

A7.
$$\sqrt{x - 2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x + 2\sqrt{x-1}} = \sqrt{(\sqrt{x-1}-1)^2} + \sqrt{(\sqrt{x-1}+1)^2} = |\sqrt{x-1}-1| + |\sqrt{x-1}+1| =$$

$$= |\sqrt{x-1}-1| + \sqrt{x-1} + 1 \Big|_{x=1,27} = |\sqrt{0,27}-1| + \sqrt{0,27} + 1 = 1 - \sqrt{0,27} + \sqrt{0,27} + 1 = 2.$$

Ответ: 2.

A8.
$$\sin^2 6,4\pi + \sin^2 2,9\pi - 4 \operatorname{tg} 1,4\pi \cdot \operatorname{tg} 7,1\pi = \sin^2 (6\pi + 0,4\pi) + \sin^2 (2\pi + 0,9\pi) - 4 \operatorname{tg} (\pi + 0,4\pi) \cdot \operatorname{tg} (7\pi + 0,1\pi) =$$

$$= \sin^2 0,4\pi + \sin^2 0,9\pi - 4 \operatorname{tg} 0,4\pi \cdot \operatorname{tg} 0,1\pi = \sin^2 0,4\pi + \sin^2 (0,5\pi + 0,4\pi) - 4 \operatorname{tg} (0,5\pi - 0,1\pi) \cdot \operatorname{tg} 0,1\pi =$$

$$= \sin^2 0,4\pi + \cos^2 0,4\pi - 4 \operatorname{ctg} 0,1\pi \cdot \operatorname{tg} 0,1\pi = 1 - 4 \cdot 1 = -3.$$

Ответ: 5.

A9.
$$A = (a^2 - b^2 - c^2 + 2bc) : \frac{a+b-c}{a+b+c} = (a^2 - (b^2 + c^2 - 2bc)) \cdot \frac{a+b+c}{a+b-c} = (a^2 - (b-c)^2) \cdot \frac{a+b+c}{a+b-c} =$$

$$= \frac{(a-b+c)(a+b-c)(a+b+c)}{a+b-c} = (a-b+c)(a+b+c) = (a+c)^2 - b^2.$$

При $a+c = \sqrt{19}$, $b=2$ $A = (\sqrt{19})^2 - 2^2 = 19 - 4 = 15$.

Ответ: 15.

$$\text{В1. } (0,4)^{\frac{6-5x}{2+5x}} \geq 6\frac{1}{4}; \quad \left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{6-5x}{2+5x}} \geq \frac{25}{4}; \quad \left(\frac{5}{2}\right)^{-\frac{6-5x}{2+5x}} \geq \left(\frac{5}{2}\right)^2; \quad \left(\frac{5}{2}\right)^{\frac{5x-6}{2+5x}} \geq \left(\frac{5}{2}\right)^2.$$

Так как $\frac{5}{2} > 1$, то полученное неравенство равносильно неравенству

$$\frac{5x-6}{2+5x} \geq 2; \quad \frac{5x-6}{2+5x} - 2 \geq 0; \quad \frac{5x-6-4-10x}{2+5x} \geq 0; \quad \frac{-5x-10}{2+5x} \geq 0; \quad \frac{5x+10}{2+5x} \leq 0; \quad x \in \left[-2; -\frac{2}{5}\right].$$

Сумма целых решений данного неравенства равна: $-2 - 1 = -3$.

Ответ: -3.

В2. Так как числа $\sin 2x$, $\sin 7x$ и $\sin 12x$ являются тремя последовательными членами арифметической прогрессии, то воспользуемся свойством арифметической прогрессии и получим уравнение

$$\sin 7x = \frac{\sin 2x + \sin 12x}{2}; \quad \sin 7x = \frac{2 \sin \frac{2x+12x}{2} \cos \frac{2x-12x}{2}}{2};$$

$$\sin 7x = \sin 7x \cos 5x; \quad \sin 7x - \sin 7x \cos 5x = 0; \quad \sin 7x(1 - \cos 5x) = 0; \quad \begin{cases} \sin 7x = 0, \\ \cos 5x = 1; \end{cases} \quad \begin{cases} x = \frac{\pi n}{7}, n \in \mathbf{Z}, \\ x = \frac{2\pi k}{5}, k \in \mathbf{Z}. \end{cases}$$

При $x = \frac{\pi n}{7}, n \in \mathbf{Z}$, найдем $\operatorname{tg}\left(70 \cdot \frac{\pi n}{7}\right) = \operatorname{tg}(10\pi n) = 0$.

При $x = \frac{2\pi k}{5}, k \in \mathbf{Z}$, найдем $\operatorname{tg}\left(70 \cdot \frac{2\pi k}{5}\right) = \operatorname{tg}(28\pi k) = 0$.

Ответ: 0.

В3. $8(4^x + 4^{-x}) - 54(2^x + 2^{-x}) + 101 = 0$. Пусть $(2^x + 2^{-x}) = t$, тогда $(2^x + 2^{-x})^2 = t^2$; $4^x + 2 \cdot 2^x \cdot 2^{-x} + 4^{-x} = t^2$; $4^x + 2 \cdot 1 + 4^{-x} = t^2$; $4^x + 4^{-x} = t^2 - 2$. Исходное уравнение принимает вид

$$8(t^2 - 2) - 54t + 101 = 0; \quad 8t^2 - 54t + 85 = 0; \quad \begin{cases} t = 6\frac{1}{4}, \\ t = 2\frac{1}{2}. \end{cases}$$

$$\text{Тогда } \begin{cases} 2^x + 2^{-x} = 4\frac{1}{4}, \\ 2^x + 2^{-x} = 2\frac{1}{2}; \end{cases} \quad \begin{cases} 2^x + \frac{1}{2^x} = 4 + \frac{1}{4}, \\ 2^x + \frac{1}{2^x} = 2 + \frac{1}{2}; \end{cases} \quad \begin{cases} 2^x = 4, \\ 2^x = \frac{1}{4}, \\ 2^x = 2, \\ 2^x = \frac{1}{2}; \end{cases} \quad \begin{cases} x = 2, \\ x = -2, \\ x = 1, \\ x = -1. \end{cases}$$

Произведение корней уравнения равно: $2 \cdot (-2) \cdot 1 \cdot (-1) = 4$.

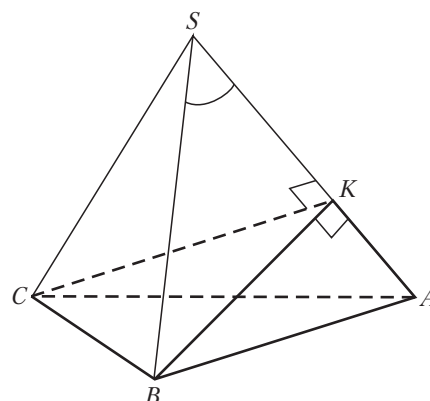
Ответ: 4.

В4. Так как пирамида $SABC$ — правильная, то ее боковые ребра равны. Пусть $SA = SB = a$. Рассмотрим прямоугольный треугольник SBK .

$\angle BSK = \arctg \frac{13}{84}$, тогда $\operatorname{tg} \angle BSK = \frac{13}{84}$, т. е. $\frac{BK}{SK} = \frac{13}{84}$. По теореме Пифагора

$$SB^2 = BK^2 + SK^2, \text{ тогда } a^2 = (13x)^2 + (84x)^2; \quad a^2 = 7225x^2; \quad x = \frac{a}{85}.$$

Таким образом, $SK = 84x = \frac{84a}{85}$, а $KA = SA - SK = a - \frac{84a}{85} = \frac{a}{85}$.



Так как секущая плоскость перпендикулярна боковому ребру SA , то отрезок SK является высотой пирамиды $SKBC$, основанием которой является треугольник KBC , а отрезок AK является высотой пирамиды $AKBC$, основанием которой также является треугольник KBC .

$$V_{SKBC} = \frac{1}{3} S_{CBK} \cdot SK = \frac{1}{3} S_{CBK} \cdot \frac{84a}{85}; \quad V_{AKBC} = \frac{1}{3} S_{CBK} \cdot AK = \frac{1}{3} S_{CBK} \cdot \frac{a}{85} \cdot \frac{V_{SKBC}}{V_{AKBC}} = \frac{\frac{1}{3} S_{CBK} \cdot \frac{84a}{85}}{\frac{1}{3} S_{CBK} \cdot \frac{a}{85}} = 84.$$

Ответ: 84.

B5. Пусть x км/ч и y км/ч — скорости первого и второго автомобилей, s км — длина кольцевой дороги. Пусть также $x > y$.

При движении в одном направлении первый автомобиль за три часа проедет на один круг больше, чем второй автомобиль, т. е. $3x - 3y = s$.

При движении в противоположных направлениях сумма расстояний, пройденных автомобилями за 20 мин, равна длине кольцевой дороги, т. е. $\frac{1}{3}x + \frac{1}{3}y = s$.

$$\text{Таким образом, } 3x - 3y = \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}y; \quad 9x - 9y = x + y; \quad y = \frac{4x}{5}.$$

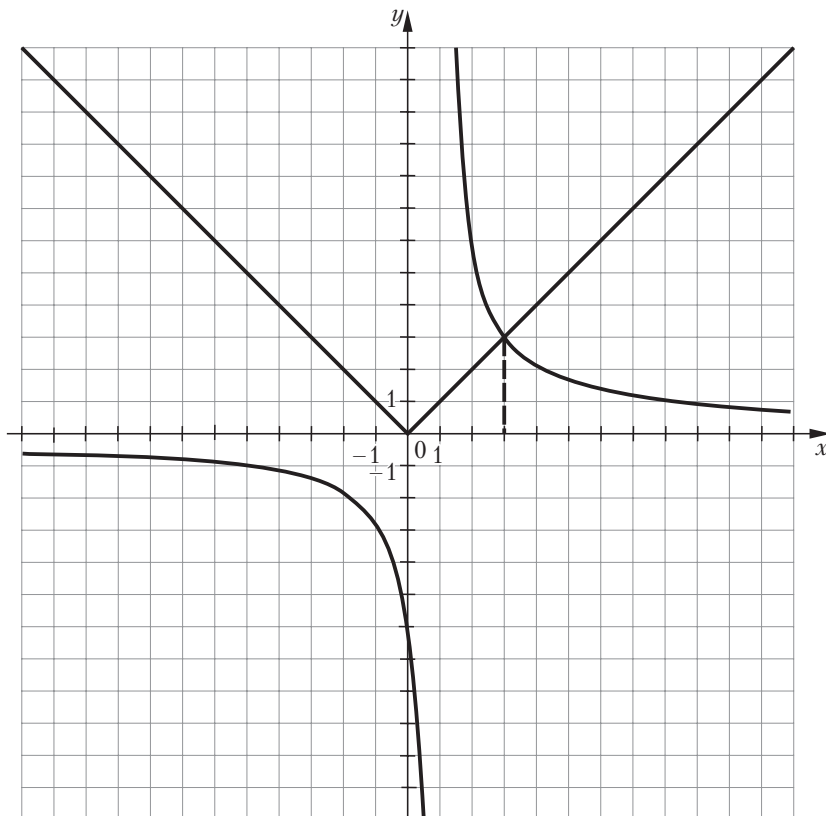
Тогда $s = 3x - 3 \cdot \frac{4x}{5} = \frac{3x}{5}$ и время, за которое первый автомобиль пройдет всю кольцевую дорогу, равно

$$t = \frac{s}{x} = \frac{\frac{3x}{5}}{x} = \frac{3}{5} \text{ ч} = 36 \text{ мин.}$$

Ответ: 36.

B6. $|\sqrt{x+4}-2| < \frac{6}{\sqrt{x+4}-3}$. Пусть $\sqrt{x+4}-2=t$, тогда неравенство принимает вид $|t| < \frac{6}{t-1}$. Построим графики функций $y=|t|$ и $y=\frac{6}{t-1}$. Графики данных функции пересекаются при $t=3$. То есть график функции $y=|t|$ расположен ниже графика функции $y=\frac{6}{t-1}$ при $1 < t < 3$. Тогда $1 < \sqrt{x+4}-2 < 3$; $3 < \sqrt{x+4} < 5$; $9 < x+4 < 25$; $5 < x < 21$. Наименьшим целым решением неравенства является число 6.

Ответ: 6.



ТЕСТ 23

Часть А

A1. График функции $y = -(x-4)^2$ изображен на рисунке 3.

Ответ: 3.

A2. 1) $A = \sin 44^\circ$, $B = \cos 44^\circ$. Так как $\sin 44^\circ < \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$, а $\cos 44^\circ > \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$, то $A < B$.

2) $A = \operatorname{tg} 2$, $B = \operatorname{tg} 1$. Так как 1 рад — угол первой четверти, то $\operatorname{tg} 1 > 0$. Так как 2 рад — угол второй четверти, то $\operatorname{tg} 2 < 0$. Значит, $A < B$.

3) $A = \sin \frac{5\pi}{2}$, $B = \operatorname{tg} \frac{5\pi}{4}$. Так как $\sin \frac{5\pi}{2} = \sin \frac{\pi}{2} = 1$ и $\operatorname{tg} \frac{5\pi}{4} = \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = 1$, то $A = B$.

4) $A = \sin \left(\arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$, $B = \cos(\arccos 1)$. Так как $\sin \left(\arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, а $\cos(\arccos 1) = 1$, то $A > B$.

5) $A = \sin 121^\circ$, $B = \sin 244^\circ$. Так как 121° — угол второй четверти, то $\sin 121^\circ > 0$. Так как 244° — угол третьей четверти, то $\sin 244^\circ < 0$. Тогда $A > B$.

Ответ: 5.

A3. 1) $5 \cdot 120\,000 = 600\,000$ (руб.) — ежедневный доход от первых пяти точек;

2) $2 \cdot 176\,000 = 352\,000$ (руб.) — ежедневный доход от двух остальных точек;

3) $600\,000 + 352\,000 = 952\,000$ (руб.) — ежедневный доход от всех точек;

4) $952\,000 : 7 = 136\,000$ (руб.) — средний доход от всех точек.

Ответ: 5.

A4.
$$\frac{d^2 + 5d + 4}{d^2 + 5d + 6} \cdot \frac{d^2 - 16}{d^2 - 4} = \frac{(d+1)(d+4)(d-2)(d+2)}{(d+2)(d+3)(d-4)(d+4)} = \frac{(d+1)(d-2)}{(d+3)(d-4)}.$$

Ответ: 1.

A5.
$$\frac{4x-3}{3x^2+8} \leq \frac{4x-3}{3x^2+5}; \frac{4x-3}{3x^2+8} - \frac{4x-3}{3x^2+5} \leq 0; (4x-3) \left(\frac{1}{3x^2+8} - \frac{1}{3x^2+5} \right) \leq 0; (4x-3) \frac{3x^2+5-(3x^2+8)}{(3x^2+8)(3x^2+5)} \leq 0;$$

$$\frac{-3(4x-3)}{(3x^2+8)(3x^2+5)} \leq 0; \frac{4x-3}{(3x^2+8)(3x^2+5)} \geq 0.$$

Так как $3x^2+8 \geq 0$ и $3x^2+5 \geq 0$ при $x \in \mathbf{R}$, то полученное неравенство равносильно неравенству $4x-3 \geq 0$; $x \geq 0,75$; $x \in [0,75; +\infty)$.

Ответ: 4.

A6.
$$\frac{(\sqrt[4]{45}-\sqrt{3})^2}{\sqrt{5}+1-2\sqrt[4]{5}} = \frac{(\sqrt[4]{9} \cdot \sqrt[4]{5}-\sqrt{3})^2}{\sqrt{5}+1-2\sqrt[4]{5}} = \frac{(\sqrt{3} \cdot \sqrt[4]{5}-\sqrt{3})^2}{\sqrt{5}+1-2\sqrt[4]{5}} = \frac{3 \cdot (\sqrt[4]{5}-1)^2}{(\sqrt[4]{5}-1)^2} = 3.$$

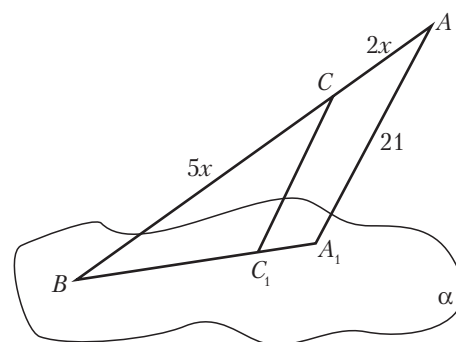
Ответ: 3.

A7. Треугольник ABA_1 подобен CBC_1 .

Так как $AC:AB=2:7$, то $BC:AB=5:7$, тогда $CC_1:AA_1=5:7$, т. е.

$$CC_1 = \frac{5}{7} \cdot 21 = 15.$$

Ответ: 2.



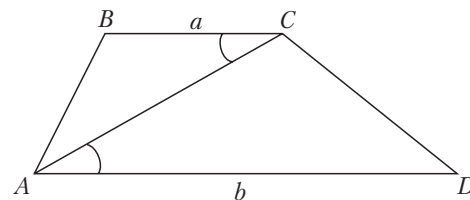
A8. $2\cos^2 x = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}$; $2\cos^2 x - 1 = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; $\cos 2x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; $2x = \pm \frac{5\pi}{6} + 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$, $x = \pm \frac{5\pi}{12} + \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$.

Наибольшим отрицательным корнем данного уравнения является число $-\frac{5\pi}{12}$.

Ответ: 1.

$$\text{A9. } \frac{S_{ABC}}{S_{ACD}} = \frac{\frac{1}{2} BC \cdot AC \cdot \sin \angle BCA}{\frac{1}{2} AD \cdot AC \cdot \sin \angle CAD}; \quad \frac{2}{3} = \frac{a}{b}. \text{ То есть } a = 2x; \quad b = 3x.$$

Так как $\frac{a+b}{2} = 35$, то $2x + 3x = 70$; $x = 14$, тогда $a = 28$; $b = 42$.



Ответ: 5.

Часть В

$$\text{B1. } 2^{-1+0+1+2+\dots+x} = 32^{x+2}; \quad 2^{-1+0+1+2+\dots+x} = 2^{5(x+2)}; \quad -1+0+1+2+\dots+x = 5(x+2); \quad 1+2+\dots+x = 5(x+2)+1.$$

Левую часть уравнения можно рассматривать как сумму арифметической прогрессии, в которой $a_1 = 1$; $a_n = x$; $n = x$.

Тогда $S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = \frac{1+x}{2} \cdot x$ и уравнение принимает вид

$$\frac{1+x}{2} \cdot x = 5(x+2)+1; \quad x^2 + x = 10x + 22; \quad x^2 - 9x - 22 = 0; \quad \begin{cases} x = 11, \\ x = -2. \end{cases}$$

Так как x — натуральное число, то $x = 11$.

Ответ: 11.

B2. Пусть n — искомое натуральное число, тогда $n = 45 \cdot q + q^2$, где q — частное от деления искомого натурального числа на 45. Так как остаток от деления всегда меньше делителя, то $q^2 < 45$, т. е. $0 \leq q < \sqrt{45}$. Наибольшим натуральным числом, удовлетворяющим данному условию, является число 6.

То есть $q = 6$ и $n = 45 \cdot 6 + 6^2 = 306$.

Ответ: 306.

$$\text{B3. } (x^2 - 5x + 1)(x^2 - 4) = 6 \cdot (x - 1)^2; \quad ((x^2 - 4) - 5(x - 1))(x^2 - 4) = 6 \cdot (x - 1)^2; \\ (x^2 - 4)^2 - 5(x - 1)(x^2 - 4) - 6 \cdot (x - 1)^2 = 0.$$

Пусть $a = x^2 - 4$; $b = x - 1$, тогда уравнение принимает вид $a^2 - 5ab - 6b^2 = 0$.

Рассмотрим данное уравнение как квадратное относительно a , тогда $\begin{cases} a = 6b, \\ a = -b. \end{cases}$

То есть $\begin{cases} x^2 - 4 = 6(x - 1), \\ x^2 - 4 = -x + 1; \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 - 6x + 2 = 0, \\ x^2 + x - 5 = 0. \end{cases}$ Оба уравнения совокупности имеют корни ($D > 0$), тогда произведение корней первого уравнения равно 2, а второго равно -5 . То есть произведение корней исходного уравнения равно -10 .

Ответ: -10 .

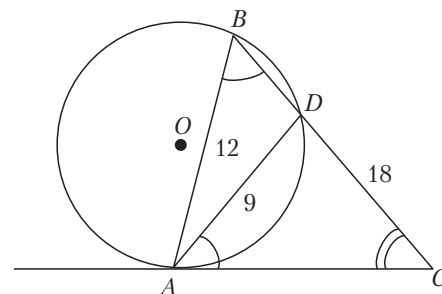
B4. Так как вписанный угол равен половине градусной мере дуги, на которую он опирается, то $\angle ABD = \frac{1}{2} \cup AD$.

Угол между касательной и секущей равен половине градусной меры дуги, заключенной между его сторонами, тогда $\angle DAC = \frac{1}{2} \cup AD$. То есть $\angle ABD = \angle DAC$.

Треугольники ACD и ABC подобны по двум углам ($\angle ABD = \angle DAC$ и $\angle ACD$ — общий), тогда $\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{DC}$; $AC = \frac{12 \cdot 18}{9} = 24$.

По свойству касательной и секущей $AC^2 = CD \cdot BC$; $BC = \frac{24^2}{18} = 32$. Тогда $BD = BC - CD = 32 - 18 = 14$.

Ответ: 14.



B5. Построим призму $ABCA_1B_1C_1$ до куба и проведем сечение куба плоскостью, проходящей через середины ребер AB , AA_1 и A_1C_1 . Полученное сечение является правильным шестиугольником, сторона которого рав-

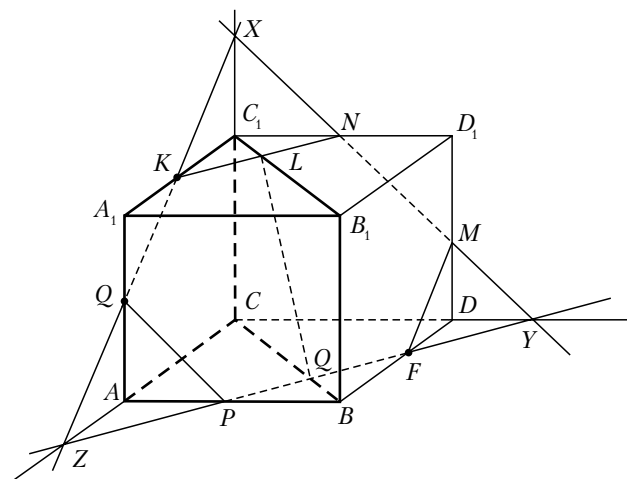
на $\sqrt{2}$ (QR — половина диагонали квадрата ABA_1B_1).
Площадь шестиугольника, являющегося сечением куба,

равна: $S_{QKNMFP} = \frac{3 \cdot (\sqrt{2})^2 \cdot \sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$. Тогда площадь пятиугольника $PQKLG$, являющегося сечением призмы $ABCA_1B_1C_1$ плоскостью, проходящей через середины ребер AB , AA_1 и A_1C_1 , равна $S_{PQKLG} = \frac{1}{2} S_{QKNMFP} = 1,5\sqrt{3}$.

Найдем значение искомого выражения:

$$2\sqrt{3}S = 2\sqrt{3}S_{PQKLG} = 2\sqrt{3} \cdot 1,5\sqrt{3} = 9.$$

Ответ: 9.



В6. $\sqrt{x-2} + |x-4| \leq 4$. Пусть $t = \sqrt{x-2}$, тогда неравенство принимает вид

$$\begin{cases} t + |t^2 - 2| \leq 4, \\ t \geq 0; \end{cases} \quad \begin{cases} |t^2 - 2| \leq 4 - t, \\ t \geq 0; \end{cases} \quad \begin{cases} t^2 - 2 \leq 4 - t, \\ t^2 - 2 \geq t - 4, \\ t \geq 0; \end{cases} \quad \begin{cases} t^2 + t - 6 \leq 0, \\ t^2 - t + 2 \geq 0, \\ t \geq 0; \end{cases} \quad \begin{cases} -3 \leq t \leq 2, \\ t \in \mathbf{R}, \\ t \geq 0; \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 2.$$

Тогда $0 \leq \sqrt{x-2} \leq 2$; $0 \leq x-2 \leq 4$; $2 \leq x \leq 6$; $x \in [2; 6]$.

Найдем сумму целых решений неравенства $2+3+4+5+6=20$.

Ответ: 20.

ТЕСТ 24

Часть А

A1. Так как диаметр шара равен 10, то его радиус равен 5. Поскольку плоскость удалена от шара на расстояние, большее радиуса, то плоскость и шар не имеют общих точек.

Ответ: 4.

A2. 1) $f(1) = \frac{2 \cdot 1 + 10}{3 \cdot 1 + 1} = 3$; $f(1) = \frac{2 \cdot 0 + 10}{3 \cdot 0 + 1} = 10$; $f(0) \cdot f(1) = 30$.

2) Функция имеет смысл при $x \neq -\frac{1}{3}$, т. е. $D(f) = \left(-\infty; -\frac{1}{3}\right) \cup \left(-\frac{1}{3}; +\infty\right)$.

3) Относительно оси ординат симметричен график четной функции. Поскольку область определения функции не симметрична относительно нуля, то функция не является четной.

4) Решением неравенства $\frac{2x+10}{3x+1} > 0$ является объединение промежутков $(-\infty; -5) \cup \left(-\frac{1}{3}; +\infty\right)$.

5) $\frac{2x+10}{3x+1} = 0$ при $x = -5$, т. е. нулем функции является число -5 .

Ответ: 5.

A3. $\sqrt{1-12x+36x^2} = 12x+1$; $\sqrt{(6x-1)^2} = 12x+1$; $|6x-1| = 12x+1$; $\begin{cases} 6x-1=12x+1, \\ 6x-1=-12x-1; \\ 12x+1 \geq 0; \end{cases} \begin{cases} x = -\frac{1}{3}, \\ x = 0; \\ x \geq -\frac{1}{12}; \end{cases} x = 0.$

Ответ: 3.

A4. $\frac{\sin 8x}{\sin 4x} - 2\cos^2 2x = \frac{2\sin 4x \cos 4x}{\sin 4x} - 2\cos^2 2x = 2\cos 4x - 2\cos^2 2x = 2(2\cos^2 2x - 1) - 2\cos^2 2x = 4\cos^2 2x - 2 - 2\cos^2 2x = 2\cos^2 2x - 2 = -2(1 - \cos^2 2x) = -2\sin^2 2x.$

Ответ: 2.

A5. 1) Рассмотрим треугольник ABC : по теореме косинусов

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cdot \cos B,$$

тогда $AC^2 = 6^2 + 10^2 - 2 \cdot 6 \cdot 10 \cdot \cos 120^\circ$; $AC^2 = 36 + 100 - 2 \cdot 6 \cdot 10 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)$;

$AC^2 = 196$; $AC = 14$.

2) Рассмотрим треугольник AA_1C — прямоугольный ($\angle A_1AC = 90^\circ$): по теореме Пифагора

$$A_1C^2 = AA_1^2 + AC^2; AA_1^2 = (14\sqrt{2})^2 - 14^2 = 196; AA_1 = 14.$$

3) A_1C — наклонная; A_1A — перпендикуляр к плоскости основания; AC — проекция наклонной A_1C на плоскость основания, тогда $\angle A_1CA$ — угол между прямой A_1C и плоскостью основания (по определению угла между прямой и плоскостью).

Так как в прямоугольном треугольнике AA_1C $AA_1 = AC = 14$, то треугольник AA_1C является равнобедренным, т. е. $\angle A_1CA = 45^\circ$.

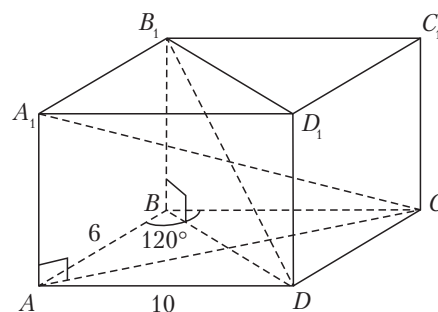
4) Рассмотрим треугольник ABD : $\angle BAD = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$.

По теореме косинусов $BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2AB \cdot AD \cdot \cos A$, тогда

$$BD^2 = 6^2 + 10^2 - 2 \cdot 6 \cdot 10 \cdot \cos 60^\circ; BD^2 = 36 + 100 - 2 \cdot 6 \cdot 10 \cdot \frac{1}{2}; BD^2 = 76; BD = 2\sqrt{19}.$$

5) Рассмотрим треугольник BB_1D — прямоугольный ($\angle B_1BD = 90^\circ$): по теореме Пифагора

$$B_1D^2 = BB_1^2 + BD^2; B_1D^2 = 14^2 + 76 = 272; B_1D = 4\sqrt{17}.$$



$$6) S_{BB_1D_1D} = BB_1 \cdot BD = 14 \cdot 2\sqrt{19} = 28\sqrt{19}.$$

7) Площадь боковой поверхности параллелепипеда найдем с помощью формулы $S_{\text{бок}} = P_{\text{осн}} \cdot h$, где $P_{\text{осн}} = 2(AB + AD) = 2 \cdot (6 + 10) = 32$; $h = BB_1 = 14$. Тогда $S_{\text{бок}} = 32 \cdot 14 = 448$.

8) Площадь полной поверхности параллелепипеда найдем с помощью формулы $S_{\text{полн}} = S_{\text{бок}} + 2S_{\text{осн}}$. Так как основанием параллелепипеда является параллелограмм $ABCD$, то $S_{\text{осн}} = AB \cdot AD \cdot \sin A = 6 \cdot 10 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 30\sqrt{3}$.

$$\text{Тогда } S_{\text{полн}} = 448 + 60\sqrt{3}.$$

9) Объем прямого параллелепипеда найдем по формуле $V = S_{\text{осн}} \cdot h$. Тогда $V = 30\sqrt{3} \cdot 14 = 420\sqrt{3} \neq 140\sqrt{3}$.

Ответ: 5.

$$\begin{aligned} \text{A6. } & \left(9,4 \cdot \sqrt[3]{36\sqrt{6}} - 3,4 \cdot \sqrt[3]{6\sqrt{36}}\right)^{\frac{6}{11}} = \left(9,4 \cdot \sqrt[3]{6^2\sqrt{6}} - 3,4 \cdot \sqrt[3]{6\sqrt{6^2}}\right)^{\frac{6}{11}} = \left(9,4 \cdot \sqrt[3]{\sqrt{6^4} \cdot 6} - 3,4 \cdot \sqrt[3]{\sqrt{6^3} \cdot 6^2}\right)^{\frac{6}{11}} = \\ & = \left(9,4 \cdot \sqrt[3]{\sqrt{6^5}} - 3,4 \cdot \sqrt[3]{\sqrt{6^5}}\right)^{\frac{6}{11}} = \left(9,4 \cdot \sqrt[6]{6^5} - 3,4 \cdot \sqrt[6]{6^5}\right)^{\frac{6}{11}} = \left(6 \cdot \sqrt[6]{6^5}\right)^{\frac{6}{11}} = \left(\sqrt[6]{6^6 \cdot 6^5}\right)^{\frac{6}{11}} = \left(\sqrt[6]{6^{11}}\right)^{\frac{6}{11}} = \left(6^{\frac{11}{6}}\right)^{\frac{6}{11}} = 6. \end{aligned}$$

Ответ: 4.

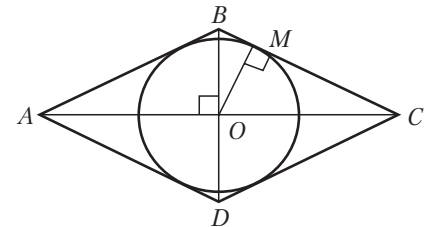
A7. Пусть $BD = 6$; $AC = 8$.

По свойству ромба $BO = \frac{1}{2}BD = 3$; $OC = \frac{1}{2}AC = 4$, и треугольник BOC — прямоугольный.

Тогда по теореме Пифагора $BC = 5$.

Отрезок OM является высотой прямоугольного треугольника BOC ,

$$\text{тогда } OM = \frac{BO \cdot OC}{BC} = \frac{3 \cdot 4}{5} = 2,4.$$



Ответ: 4.

$$\begin{aligned} \text{A8. } & \begin{cases} 7 \cdot 2^x + 6y = 2, \\ 2^{x+1} - 3y = 43; \end{cases} \quad \begin{cases} 7 \cdot 2^x + 6y = 2, \\ 2 \cdot 2^x - 3y = 43; \end{cases} \quad \begin{cases} 7 \cdot 2^x + 6y = 2, \\ 4 \cdot 2^x - 6y = 86; \end{cases} \quad \begin{cases} 11 \cdot 2^x = 88, \\ 7 \cdot 2^x + 6y = 2; \end{cases} \quad \begin{cases} 2^x = 8, \\ 7 \cdot 2^x + 6y = 2; \end{cases} \quad \begin{cases} 2^x = 8, \\ 7 \cdot 8 + 6y = 2; \end{cases} \\ & \begin{cases} 2^x = 8, \\ 6y = -54; \end{cases} \quad \begin{cases} 2^x = 8, \\ y = -9. \end{cases} \end{aligned}$$

$$\text{Тогда } 2^x - y = 8 - (-9) = 17.$$

Ответ: 5.

$$\text{A9. } \sqrt{49 - 4x^2} \cdot \left(\sin \pi x + 3 \cos \frac{\pi x}{2}\right) = 0; \quad \begin{cases} 49 - 4x^2 = 0; \\ \sin \pi x + 3 \cos \frac{\pi x}{2} = 0; \\ 49 - 4x^2 \geq 0; \end{cases} \quad \begin{cases} 4x^2 = 49; \\ 2 \sin \frac{\pi x}{2} \cos \frac{\pi x}{2} + 3 \cos \frac{\pi x}{2} = 0; \\ 4x^2 - 49 \leq 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \pm 3,5; \\ \cos \frac{\pi x}{2} \left(2 \sin \frac{\pi x}{2} + 3\right) = 0; \\ -3,5 \leq x \leq 3,5; \end{cases} \quad \begin{cases} x = \pm 3,5; \\ \begin{cases} \cos \frac{\pi x}{2} = 0, \\ 2 \sin \frac{\pi x}{2} + 3 = 0; \end{cases} \\ -3,5 \leq x \leq 3,5; \end{cases} \quad \begin{cases} x = \pm 3,5; \\ \begin{cases} \cos \frac{\pi x}{2} = 0, \\ \sin \frac{\pi x}{2} = -1,5; \end{cases} \\ -3,5 \leq x \leq 3,5; \end{cases} \quad \begin{cases} x = \pm 3,5; \\ \begin{cases} \frac{\pi x}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbf{Z}, \\ x \in \emptyset; \\ -3,5 \leq x \leq 3,5; \end{cases} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \pm 3,5; \\ \begin{cases} x = 1 + 2n, n \in \mathbf{Z}, \\ -3,5 \leq x \leq 3,5; \end{cases} \end{cases} \quad \begin{cases} x = \pm 3,5, \\ x = -3; -1; 1; 3. \end{cases} \quad \text{Таким образом, уравнение имеет шесть корней.}$$

Ответ: 4.

В1. $\frac{x^2-3x-6}{x} - \frac{8x}{x^2-3x-6} = -2.$

Пусть $\frac{x^2-3x-6}{x} = t$, тогда уравнение принимает вид $t - \frac{8}{t} = -2$; $t^2 + 2t - 8 = 0$; $\begin{cases} t = -4, \\ t = 2. \end{cases}$

Тогда $\begin{cases} \frac{x^2-3x-6}{x} = -4, \\ \frac{x^2-3x-6}{x} = 2; \end{cases} \begin{cases} x^2+x-6=0, \\ x^2-5x-6=0; \end{cases} \begin{cases} x=-3, \\ x=2, \\ x=6, \\ x=-1. \end{cases}$

Найдем произведение корней уравнения: $(-3) \cdot (-1) \cdot 2 \cdot 6 = 36.$

Ответ: 36.

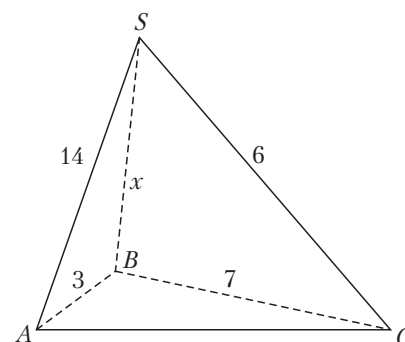
В2. Любая сторона треугольника больше разности двух других его сторон и меньше их суммы.

Тогда для треугольников SAB и SBC получим:

$$\begin{cases} 14-3 < x < 14+3, \\ 7-6 < x < 7+6; \end{cases} \begin{cases} 11 < x < 17, \\ 1 < x < 13; \end{cases} 11 < x < 13.$$

Поскольку длина ребра SB является целым числом, то $SB = 12.$

Ответ: 12.



В3. $x^2 + 25 \geq 8\sqrt{5-x} + 10x$; $x^2 - 10x + 25 \geq 8\sqrt{5-x}$; $(5-x)^2 \geq 8\sqrt{5-x}.$

Пусть $t = \sqrt{5-x}$, тогда получим

$$\begin{cases} t^4 \geq 8t, \\ t \geq 0; \end{cases} \begin{cases} t^4 - 8t \geq 0, \\ t \geq 0; \end{cases} \begin{cases} t(t^3 - 8) \geq 0, \\ t \geq 0; \end{cases} \begin{cases} t \in (-\infty; 0] \cup [2; +\infty), \\ t \geq 0; \end{cases} \begin{cases} t \in [2; +\infty); \\ t = 0. \end{cases}$$

То есть $\begin{cases} \sqrt{5-x} \geq 2, \\ \sqrt{5-x} = 0; \end{cases} \begin{cases} 5-x \geq 4, \\ x = 5; \end{cases} \begin{cases} -x \geq -1, \\ x = 5; \end{cases} \begin{cases} x \leq 1, \\ x = 5; \end{cases} x \in (-\infty; 1] \cup \{5\}.$

Найдем среднее арифметическое целых неотрицательных решений неравенства: $\frac{0+1+5}{3} = 2.$

Ответ: 2.

В4. 1) Треугольники CBM и ADB подобны по двум углам ($\angle CMB = \angle ADB = 90^\circ$ и $\angle B$ — общий), тогда $\frac{AB}{CB} = \frac{DB}{MB}.$

2) Рассмотрим треугольники ABC и $MBD.$

Поскольку $\frac{AB}{DB} = \frac{CB}{MB}$ и $\angle B$ — общий, то $\triangle ABC \sim \triangle DBM$, причем

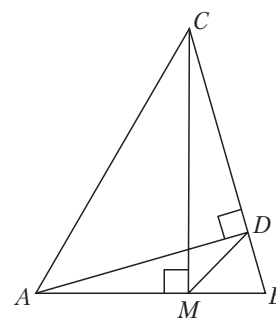
$$k = \frac{DB}{AB} = \frac{MB}{CB} = \frac{DM}{AC} = \cos \angle B.$$

Так как периметр треугольника ABC равен 15, а периметр треугольника BDM равен 9, то $k = \frac{P_{BDM}}{P_{ABC}} = \frac{9}{15} = \frac{3}{5}$, т. е. $\cos \angle B = \frac{3}{5}$. Тогда по основному тригонометрическому тождеству $\sin \angle B = \sqrt{1 - \cos^2 \angle B} = \frac{4}{5}.$

3) По теореме синусов из треугольника DMB получим $\frac{DM}{\sin \angle B} = 2R$, $DM = 2 \cdot 1,8 \cdot \frac{4}{5} = \frac{72}{25}.$

Поскольку $\frac{DM}{AC} = k$, то $AC = \frac{72}{25} : \frac{3}{5} = \frac{24}{5} = 4,8$. Тогда $10 \cdot AC = 48.$

Ответ: 48.



В5. Пусть AC и BD — графики движения первого и второго велосипедистов соответственно.

Из подобия треугольников POC и AOM следует, что

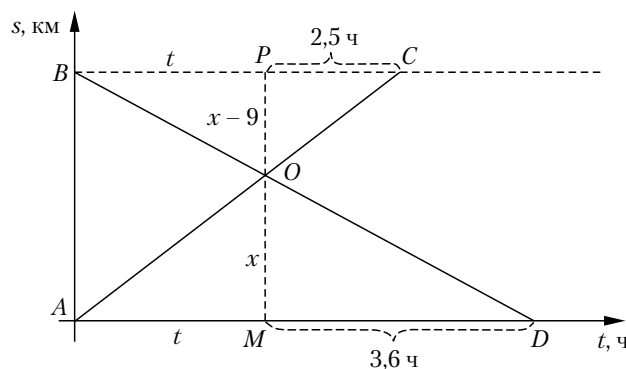
$$\frac{x-9}{x} = \frac{2,5}{t}.$$

А из подобия треугольников BOP и DOM получим, что $\frac{x-9}{x} = \frac{t}{3,6}$.

То есть $\frac{2,5}{t} = \frac{t}{3,6}$; $t^2 = 2,5 \cdot 3,6$; $t = 3$.

Тогда $\frac{x-9}{x} = \frac{2,5}{3}$; $3x - 27 = 2,5x$; $0,5x = 27$; $x = 54$.

Найдем скорость первого велосипедиста: $v = \frac{x}{t} = \frac{54}{3} = 18$ (км/ч).



Ответ: 18.

В6. $(4x - x^2 - 3) \cdot \log_2(\cos^2 \pi x + 1) \geq 1$.

Оценим выражения $(4x - x^2 - 3)$ и $\log_2(\cos^2 \pi x + 1)$:

1) $4x - x^2 - 3 = -(x^2 - 4x + 4) + 1 = -(x - 2)^2 + 1 \leq 1$ при $x \in \mathbf{R}$;

2) $0 \leq \cos^2 \pi x \leq 1$; $1 \leq \cos^2 \pi x + 1 \leq 2$. Поскольку функция $y = \log_2 x$ возрастает на области определения, то $\log_2 1 \leq \log_2(\cos^2 \pi x + 1) \leq \log_2 2$, т. е. $0 \leq \log_2(\cos^2 \pi x + 1) \leq 1$;

3) поскольку каждый множитель в произведении $(4x - x^2 - 3) \cdot \log_2(\cos^2 \pi x + 1)$ не превосходит единицы, то и значение данного произведения не может быть больше 1.

Тогда неравенство $(4x - x^2 - 3) \cdot \log_2(\cos^2 \pi x + 1) \geq 1$ равносильно системе уравнений

$$\begin{cases} 4x - x^2 - 3 = 1, \\ \log_2(\cos^2 \pi x + 1) = 1; \end{cases} \quad \begin{cases} x = 2, \\ \cos^2 \pi x = 1; \end{cases} \quad x = 2.$$

Таким образом, единственным решением исходного неравенства является число 2.

Ответ: 1.

Часть А

A1. $0,056 : (2,05 - 1,98) \cdot 6,9 = 0,056 : 0,07 \cdot 6,9 = 0,8 \cdot 6,9 = 5,52.$

Ответ: 3.

A2. Найдем $a_{n+1} = 5(n+1) + 3 = 5n + 8$. Тогда $d = a_{n+1} - a_n = (5n + 8) - (5n + 3) = 5$.

Ответ: 1.

A3. Умножим обе части неравенства $\frac{7x}{3} - \frac{11(x+3)}{6} \geq \frac{3x-1}{5} - \frac{13-x}{2}$ на 30 и получим:

$$10 \cdot 7x - 5 \cdot 11(x+3) \geq 6 \cdot (3x-1) - 15 \cdot (13-x); 70x - 55x - 165 \geq 18x - 6 - 195 + 15x;$$

$$-18x \geq -36; x \leq 2; x \in (-\infty; 2].$$

Ответ: 4.

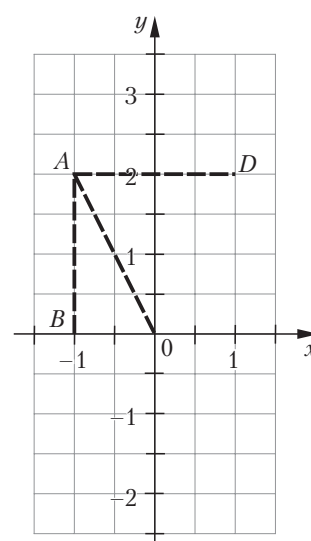
A4. Пусть точка A имеет координаты $(x; 2)$. Тогда по теореме Пифагора из прямоугольного треугольника ABO получим:

$$AO^2 = AB^2 + BO^2, \text{ т. е. } (\sqrt{5})^2 = 2^2 + x^2; x = \pm 1.$$

Так как точка A расположена во второй четверти, то ее абсцисса отрицательна, т. е. $x = -1$.

Поскольку точка D симметрична точке $A(-1; 2)$ относительно оси ординат, то ординаты этих точек равны, а абсциссы противоположны, т. е. точка D имеет координаты $(1; 2)$.

Ответ: 2.



A5. Так как $AB \parallel EC$, то треугольники ABD и ECD подобны по двум углам.

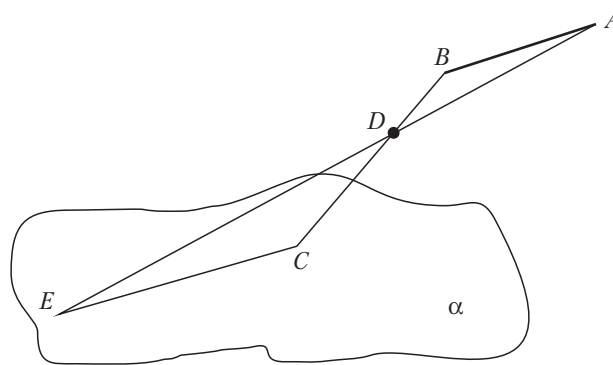
Тогда $\frac{AB}{EC} = \frac{BD}{CD}; \frac{15}{EC} = \frac{3}{5}; EC = 25.$

Ответ: 5.

$$\begin{aligned} \text{A6. } & \left(a^{-\frac{1}{5}} - a^{\frac{4}{5}} \right) \left(a^{\frac{1}{5}} - a^{-\frac{4}{5}} \right) = a^{-\frac{1}{5}}(1-a) \cdot a^{-\frac{4}{5}}(a-1) = \\ & = -\frac{(a-1)^2}{a} \Big|_{a=10} = -\frac{81}{10} = -8,1. \end{aligned}$$

Ответ: 3.

A7. Пусть r — радиус окружности, тогда сторона шестиугольника, вписанного в эту окружность, равна $b_6 = r$, а сторона шестиугольника, описанного около этой окружности, равна $a_6 = \frac{2r}{\sqrt{3}}$.



Воспользуемся формулой площади правильного шестиугольника $S_6 = \frac{3a^2\sqrt{3}}{2}$ и составим уравнение

$$\frac{3 \cdot \left(\frac{2r}{\sqrt{3}} \right)^2 \cdot \sqrt{3}}{2} + \frac{3r^2\sqrt{3}}{2} = 14\sqrt{3}; 2r^2 + \frac{3r^2}{2} = 14; r^2 = 4.$$

Площадь круга, ограниченного данной окружностью, равна $S = \pi r^2 = 4\pi$.

Ответ: 1.

A8. Найдем значение выражения $45\frac{1}{2} + 22\frac{3}{4} + 11\frac{3}{8} + \dots$, представляющего собой сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии с первым членом $b_1 = 45\frac{1}{2}$ и знаменателем $q = \frac{22\frac{3}{4}}{45\frac{1}{2}} = \frac{91}{4} : \frac{91}{2} = \frac{1}{2}$.

По формуле $S = \frac{b_1}{1-q}$ получим $S = \frac{45\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = 91$.

Тогда исходное уравнение принимает вид $3^{2x-5} + 3^{2x-7} + 3^{2x-9} = 91$; $3^{2x-9}(3^4 + 3^2 + 1) = 91$; $3^{2x-9} \cdot 91 = 91$; $3^{2x-9} = 1$; $2x-9=0$; $x=4,5$.

Ответ: 4.

A9. Так как дискриминант квадратного трехчлена $x^2 - 4x + 7$ — отрицательный, а первый коэффициент — положительный, то $x^2 - 4x + 7 > 0$ при $x \in \mathbf{R}$.

Найдем наименьшее значение выражения $x^2 - 4x + 7 = x^2 - 4x + 4 + 3 = (x-2)^2 + 3 \geq 3$ при $x \in \mathbf{R}$. Тогда $\frac{1}{x^2 - 4x + 7} = \frac{1}{(x-2)^2 + 3} \leq \frac{1}{3}$ при $x \in \mathbf{R}$. Значит, $\frac{3}{x^2 - 4x + 7} \leq 1$.

То есть $0 < f(x) \leq 1$. Множеством значений данной функции является промежуток $(0; 1]$.

Ответ: 5.

Часть В

B1. Так как $1 + \operatorname{ctg}^2 \frac{\pi x}{4} \geq 1$ при допустимых значениях переменной, то неравенство равносильно системе

$$\begin{cases} x^2 - x - 12 \leq 0, & \begin{cases} (x-4)(x+3) \leq 0, \\ x \in [-3; 4], \end{cases} \\ \sin \frac{\pi x}{4} \neq 0; & \begin{cases} \frac{\pi x}{4} \neq \pi n, n \in \mathbf{Z}; \\ x \neq 4n, n \in \mathbf{Z}; \end{cases} \end{cases} \quad x \in [-3; 0) \cup (0; 4).$$

Таким образом, неравенство имеет шесть целых решений, это числа $-3; -2; -1; 1; 2; 3$.

Ответ: 6.

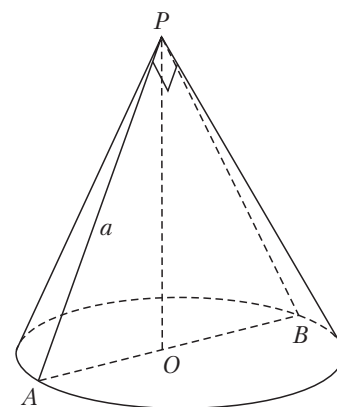
B2. Пусть образующая конуса равна a . Так как осевым сечением конуса является прямоугольный треугольник PBA , то $AB = a\sqrt{2}$. Тогда радиус основания конуса равен: $r = \frac{1}{2}AB = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

По формуле $S_{\text{полн}} = \pi r(r+l)$ получим

$$S_{\text{полн}} = \pi \frac{a\sqrt{2}}{2} \left(\frac{a\sqrt{2}}{2} + a \right) = \frac{\pi a^2 \sqrt{2}(\sqrt{2} + 2)}{4} = \frac{\pi a^2(1 + \sqrt{2})}{2}.$$

По условию задачи $a = 2\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{\pi}}$, тогда

$$S_{\text{полн}} = \frac{\pi \cdot \frac{4(\sqrt{2}-1)}{\pi} \cdot (1 + \sqrt{2})}{2} = \frac{4(\sqrt{2}-1) \cdot (1 + \sqrt{2})}{2} = 2.$$



Ответ: 2.

B3. $\log_3 \sin^5 \frac{\pi}{8} \cdot \log_{\sin \frac{\pi}{8}} 9 = 5 \log_3 \sin \frac{\pi}{8} \cdot \log_{\sin \frac{\pi}{8}} 9 = 5 \cdot \frac{1}{\log_{\sin \frac{\pi}{8}} 3} \cdot \log_{\sin \frac{\pi}{8}} 9 = 5 \cdot \frac{\log_{\sin \frac{\pi}{8}} 9}{\log_{\sin \frac{\pi}{8}} 3} = 5 \cdot \log_3 9 = 5 \cdot 2 = 10$.

Ответ: 10.

В4. Для того чтобы взять из дома ручку, Пете пришлось проделать «лишний» путь, равный удвоенной части пути, которую он прошел, когда вспомнил. В этом случае на весь путь у него уйдет $20 + 10 + 8 = 38$ (мин).

То есть на «лишний» путь затрачено «лишних» 18 мин. Тогда на путь, пройденный от места, когда Петя вспомнил о забытой ручке, до дома, было затрачено $18 : 2 = 9$ (мин).

Так как на весь путь затрачивается 20 мин, то Петя прошел $\frac{9}{20} = 45\%$ всего пути.

Ответ: 45.

В5. $x^2 - x = \sqrt{2x-1} - 1$; $x^2 - x + 1 = \sqrt{2x-1}$; $4x^2 - 4x + 4 = 4\sqrt{2x-1}$; $(2x-1)^2 + 3 = 4\sqrt{2x-1}$. Пусть $t = \sqrt{2x-1}$, тогда уравнение принимает вид

$$t^4 - 4t + 3 = 0; \quad t^4 + 4t^2 + 4 - 4t^2 - 4t - 1 = 0; \quad (t^2 + 2)^2 - (2t + 1)^2 = 0; \quad (t^2 - 2t + 1)(t^2 + 2t + 3) = 0.$$

Уравнение $t^2 + 2t + 3 = 0$ не имеет корней ($D < 0$).

Корнем уравнения $t^2 - 2t + 1 = 0$ является $t = 1$. Тогда $\sqrt{2x-1} = 1$; $x = 1$.

Ответ: 1.

В6. Так как $PC \perp (ABK)$ и $BO \subset (ABK)$, то $BO \perp PC$. Аналогично доказывается, что $BO \perp AP$.

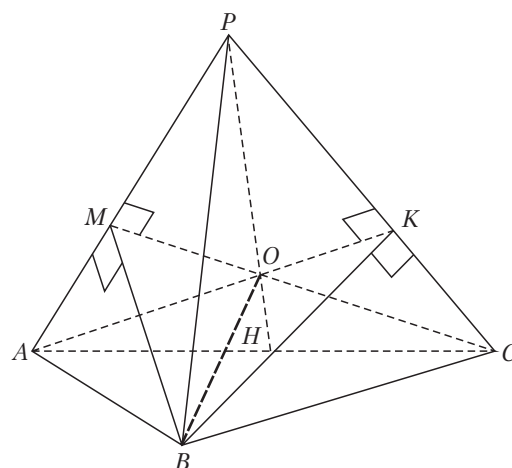
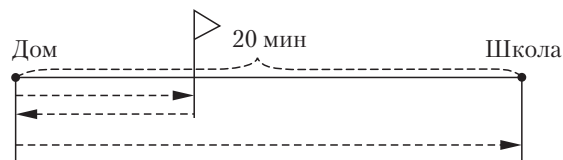
Таким образом, прямая BO перпендикулярна двум пересекающимся прямым, лежащим в плоскости грани APC , значит, $BO \perp (APC)$.

Пусть P — вершина пирамиды, а треугольник ABC — ее основание. Найдем объем пирамиды: $V = \frac{512\sqrt{23}}{3}$.

Пусть B — вершина пирамиды, треугольник APC — ее основание. Так как $BO \perp (APC)$, то BO — высота пирамиды и $V = \frac{1}{3} \cdot S_{APC} \cdot BO$. Так как $S_{APC} = 128\sqrt{2}$, то

$$\frac{512\sqrt{23}}{3} = \frac{1}{3} \cdot 128\sqrt{2} \cdot BO; \quad BO = 2\sqrt{46}; \quad BO^2 = 184.$$

Ответ: 184.



ТЕСТ 26

Часть А

A1. Данная фигура состоит из 28 равных квадратов.

На первом рисунке заштриховано 10 квадратов, т. е. $\frac{8}{28} = \frac{2}{7}$ всей фигуры.

На втором рисунке — 3 квадрата, или $\frac{3}{28}$ всей фигуры.

На третьем и четвертом рисунках — 10 квадратов, т. е. $\frac{10}{28} = \frac{5}{14}$ всей фигуры.

На пятом рисунке — 12 квадратов, т. е. $\frac{12}{28} = \frac{3}{7}$ всей фигуры.

Ответ: 5.

A2. Число $-3,6$ заключено между числами -4 и -3 .

Ответ: 4.

A3.
$$\left(\sqrt[3]{7}\right)^{\frac{3}{\log_2 7}} = \left(7^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{3}{\log_2 7}} = 7^{\frac{1}{\log_2 7}} = 7^{\log_7 2} = 2.$$

Ответ: 2.

A4. Пусть в школе x учащихся, тогда спортом занимается $(0,88x)$ человек, а футболом занимается $0,75 \cdot 0,88x = 0,66x$ человек, что составляет 66 % учащихся школы.

Ответ: 4.

A5. Так как функция является периодической с периодом, равным 2, то $f(7,3) = f(3,3 + 2 \cdot 2) = f(3,3) = 10$.

Поскольку функция является нечетной, то $f(-7,3) = -f(7,3) = -10$.

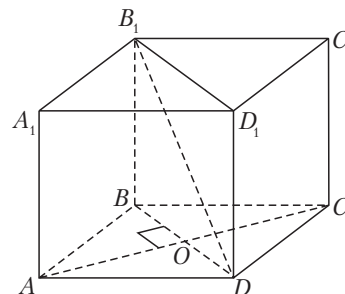
Ответ: 4.

A6. Так как призма является правильной, то $ABCD$ — квадрат. Поскольку площадь квадрата равна 16, то его сторона равна 4.

Прямые AA_1 и B_1D являются скрещивающимися. Прямая B_1D лежит в плоскости BB_1D , а прямая AA_1 параллельна этой плоскости. Тогда расстояние между прямыми AA_1 и B_1D равно расстоянию между прямой AA_1 и плоскостью BB_1D , т. е. длине отрезка AO .

Так как отрезок AC является диагональю квадрата $ABCD$, то

$$AO = \frac{1}{2} AC = \frac{1}{2} \cdot 4\sqrt{2} = 2\sqrt{2}.$$



Ответ: 4.

A7.
$$\begin{cases} \lg((2x-1)(2x-3)) > \lg(3x-3), \\ 2x-1 > 0, \\ 2x-3 > 0; \end{cases} \quad \begin{cases} 4x^2 - 11x + 6 > 0, \\ x > 1,5; \end{cases} \quad \begin{cases} x \in \left(-\infty; \frac{3}{4}\right) \cup (2; +\infty), \\ x > 1,5; \end{cases} \quad x \in (2; +\infty).$$

Ответ: 1.

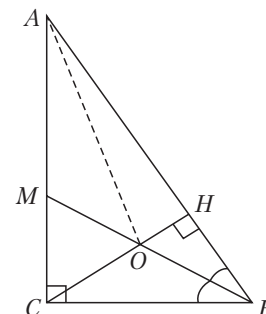
A8. В прямоугольном треугольнике ABC по теореме Пифагора найдем гипотенузу

$AB = 10$, а по формуле $h = \frac{ab}{c}$ — высоту $CH = \frac{6 \cdot 8}{10} = 4,8$.

Из прямоугольного треугольника BCH найдем $BH = 3,6$, тогда $AH = 6,4$.

В треугольнике BCH воспользуемся теоремой о биссектрисе треугольника и получим $\frac{CO}{OH} = \frac{CB}{BH}$; $\frac{CO}{OH} = \frac{6}{3,6}$; $\frac{CO}{OH} = \frac{5}{3}$.

Найдем площадь треугольника ACH : $S_{ACH} = \frac{CH \cdot AH}{2} = \frac{4,8 \cdot 6,4}{2} = 15,36$.



Так как $\frac{CO}{OH} = \frac{5}{3}$, то $S_{AOC} = \frac{5}{8} S_{ACH} = \frac{5}{8} \cdot 15,36 = 9,6$.

Ответ: 3.

A9. Решим уравнение $4\sin^2 x + 7\cos 2x = 1$ различными способами.

I способ.

$$4\sin^2 x + 7\cos 2x = 1; \quad 4\sin^2 x + 7(1 - 2\sin^2 x) = 1; \quad -10\sin^2 x = -6; \quad \sin^2 x = 0,6; \quad \sin x = \pm\sqrt{0,6};$$

$$\begin{cases} x = (-1)^k \arcsin \sqrt{0,6} + \pi k, \quad k \in \mathbf{Z}, \\ x = (-1)^{k+1} \arcsin \sqrt{0,6} + \pi k, \quad k \in \mathbf{Z}; \end{cases} \quad x = \pm \arcsin \sqrt{0,6} + \pi k, \quad k \in \mathbf{Z}.$$

II способ.

$$4\sin^2 x + 7\cos 2x = 1; \quad 4 \cdot \frac{1 - \cos 2x}{2} + 7\cos 2x = 1; \quad \cos 2x = -\frac{1}{5}; \quad x = \pm \arccos\left(-\frac{1}{5}\right) + 2\pi k, \quad k \in \mathbf{Z};$$

$$x = \pm \frac{1}{2} \arccos\left(-\frac{1}{5}\right) + \pi k, \quad k \in \mathbf{Z};$$

III способ.

$$4\sin^2 x + 7(\cos^2 x - \sin^2 x) = 1; \quad 4\sin^2 x - 6\cos^2 x = 0; \quad \operatorname{tg}^2 x = \frac{3}{2}; \quad x = \pm \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{3}{2}} + \pi k, \quad k \in \mathbf{Z}.$$

Проверим, являются ли числа вида $\pm \operatorname{arctg} \sqrt{1,5} + \pi k, k \in \mathbf{Z}$, корнями исходного уравнения. При $x = \pm \operatorname{arctg} \sqrt{1,5} + \pi k, k \in \mathbf{Z}$, получим

$$\operatorname{tg}^2(\pm \operatorname{arctg} \sqrt{1,5} + \pi k) = \operatorname{tg}^2(\pm \operatorname{arctg} \sqrt{1,5}) = \operatorname{tg}^2(\operatorname{arctg} \sqrt{1,5}) = \frac{1}{\operatorname{ctg}^2(\operatorname{arctg} \sqrt{1,5})} = \frac{1}{(\sqrt{1,5})^2} = \frac{1}{1,5} = \frac{2}{3} \neq \frac{3}{2}.$$

Ответ: 4.

Часть B

$$\begin{aligned} \text{B1. } & \frac{36^n}{3^{2n-3} \cdot 2^{2n+2}} \cdot \frac{2^{2n-1} \cdot 3^{n+1}}{6 \cdot 12^n} = \frac{36^n}{3^{2n-3} \cdot 2^{2n+2}} \cdot \frac{6 \cdot 12^n}{2^{2n-1} \cdot 3^{n+1}} = \frac{6^{2n}}{3^{2n} \cdot 3^{-3} \cdot 2^{2n} \cdot 2^2} \cdot \frac{6 \cdot 3^n \cdot 4^n}{2^{2n} \cdot 2^{-1} \cdot 3^n \cdot 3} = \\ & = \frac{6^{2n}}{6^{2n} \cdot 3^{-3} \cdot 2^2} \cdot \frac{2 \cdot 3^n \cdot 2^{2n}}{2^{2n} \cdot 2^{-1} \cdot 3^n} = \frac{1}{3^{-3} \cdot 2^2} \cdot \frac{2}{2^{-1}} = 27. \end{aligned}$$

Ответ: 27.

$$\text{B2. } \frac{4x}{4x^2 - 8x + 7} + \frac{3x}{4x^2 - 10x + 7} = 1; \quad \frac{4x}{x\left(4x - 8 + \frac{7}{x}\right)} + \frac{3x}{x\left(4x - 10 + \frac{7}{x}\right)} = 1; \quad \frac{4}{4x - 8 + \frac{7}{x}} + \frac{3}{4x - 10 + \frac{7}{x}} = 1.$$

Пусть $t = 4x - 8 + \frac{7}{x}$, тогда уравнение принимает вид

$$\frac{4}{t} + \frac{3}{t-2} = 1; \quad \frac{4(t-2)+3t}{t(t-2)} = 1; \quad \frac{7t-8}{t(t-2)} = 1; \quad \begin{cases} t^2 - 9t + 8 = 0, \\ t \neq 0, \\ t \neq 2; \end{cases} \quad \begin{cases} t = 1, \\ t = 8. \end{cases}$$

$$\text{То есть } \begin{cases} 4x - 8 + \frac{7}{x} = 1, \\ 4x - 8 + \frac{7}{x} = 8; \end{cases} \quad \begin{cases} 4x - 9 + \frac{7}{x} = 0, \\ 4x - 16 + \frac{7}{x} = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} 4x^2 - 9x + 7 = 0, \\ 4x^2 - 16x + 7 = 0. \end{cases}$$

Первое уравнение совокупности не имеет корней ($D < 0$).

Сумма корней второго уравнения равна $\frac{16}{4} = 4$.

Ответ: 4.

В3. Пусть $t = (x-3)^2$, тогда неравенство принимает вид $t + \frac{1}{t} > 2$. По свойству двух положительных взаимно обратных чисел получим, что неравенство $t + \frac{1}{t} > 2$ равносильно системе неравенств $\begin{cases} t \neq 0, \\ t \neq 1. \end{cases}$

$$\text{Тогда } \begin{cases} (x-3)^2 \neq 0, \\ (x-3)^2 \neq 1; \end{cases} \begin{cases} x \neq 3, \\ x \neq 2, \\ x \neq 4. \end{cases}$$

На промежутке $[1; 25]$ находится 22 целых решения данного неравенства.

Ответ: 22.

В4. При вращении равнобедренной трапеции вокруг большего основания образовались два равных конуса и цилиндр, радиусы оснований которых равны.

По формуле Герона найдем площадь треугольника ABC :

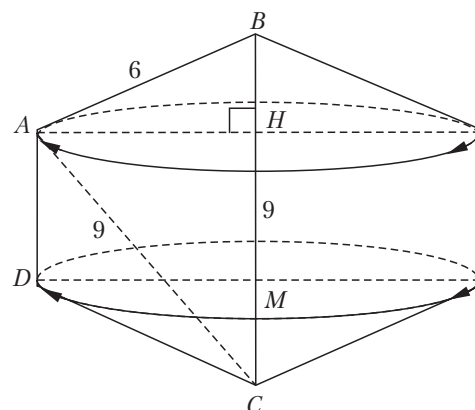
$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{12 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 6} = 18\sqrt{2}.$$

$$\text{Тогда } AH = \frac{2S_{ABC}}{BC} = 4\sqrt{2} \text{ и } BH = \sqrt{AB^2 - AH^2} = \sqrt{36 - 32} = 2.$$

Значит, $HM = BC - 2BH = 5$.

$$\text{Тогда } V = 2 \cdot \frac{1}{3} \pi \cdot (4\sqrt{2})^2 \cdot 2 + \pi \cdot (4\sqrt{2})^2 \cdot 5 = \pi \cdot (4\sqrt{2})^2 \cdot \left(\frac{4}{3} + 5\right) = \frac{608\pi}{3}.$$

Значение искомого выражения равно 608.



Ответ: 608.

В5. Воспользуемся формулой суммы m членов арифметической прогрессии и получим

$$\begin{aligned} \frac{S_{3m}}{S_{2m} - S_m} &= \frac{\frac{2a_1 + d(3m-1)}{2} \cdot 3m}{\frac{2a_1 + d(2m-1)}{2} \cdot 2m - \frac{2a_1 + d(m-1)}{2} \cdot m} = \frac{(2a_1 + d(3m-1)) \cdot 3}{(2a_1 + d(2m-1)) \cdot 2 - (2a_1 + d(m-1))} = \\ &= \frac{(2a_1 + d(3m-1)) \cdot 3}{4a_1 + 2d(2m-1) - 2a_1 - d(m-1)} = \frac{(2a_1 + d(3m-1)) \cdot 3}{2a_1 + d(3m-1)} = 3. \end{aligned}$$

Ответ: 3.

В6. Оценим левую и правую части данного уравнения.

Поскольку $|x^2 - 9| \geq 0$ при $x \in \mathbf{R}$, то $\pi^{|x^2-9|} \geq 1$ при $x \in \mathbf{R}$.

С другой стороны, $-1 \leq \sin \frac{\pi x}{2} \leq 1$ при $x \in \mathbf{R}$.

Таким образом, равенство возможно только в том случае, когда и левая и правая части уравнения равны

$$\text{единице, т. е. } \begin{cases} \pi^{|x^2-9|} = 1, \\ \sin \frac{\pi x}{2} = 1; \end{cases} \begin{cases} |x^2-9| = 0, \\ \sin \frac{\pi x}{2} = 1; \end{cases} \begin{cases} x = \pm 3, \\ \sin \frac{\pi x}{2} = 1. \end{cases}$$

При $x = 3$ получим, что $\sin \frac{3\pi}{2} = -1 \neq 1$, а при $x = -3$ имеем $\sin \left(-\frac{3\pi}{2}\right) = 1$.

То есть уравнение имеет единственный корень, равный -3 .

Ответ: -3 .

ТЕСТ 27

Часть А

A1. Так как собственная скорость лодки x км/ч, а скорость течения реки 2 км/ч, то скорость лодки по течению реки равна $(x+2)$ км/ч, а против течения реки — $(x-2)$ км/ч. За 5 ч по течению реки лодка проплыла $5 \cdot (x+2)$ км, а за 2 ч против течения реки — $2 \cdot (x-2)$ км. Так как длина всего участка пути равна 50 км, то условию задачи соответствует уравнение $(x+2) \cdot 5 + (x-2) \cdot 2 = 50$.

Ответ: 3.

A2. 1) $\frac{2}{7} \cdot 14 = 4$;
2) $B = 4 : 0,4 = 10$.

Ответ: 1.

A3. Воспользуемся формулой разности квадратов и получим:

$$548^2 - 452^2 = (548 - 452)(548 + 452) = 96 \cdot 1000 = 96\,000.$$

Ответ: 5.

A4. Так как график искомой функции вида $y = kx + b$ не пересекает график функции $y = 4x + 7$, то $k = 4$ и функция имеет вид $y = 4x + b$.

График функции проходит через точку $M(-2; 3)$, значит, $3 = 4 \cdot (-2) + b$; $b = 11$.

То есть искомая функция имеет вид $y = 4x + 11$.

Ответ: 2.

A5. Неравенство $\sqrt{3-3^x} \leq 0$ равносильно уравнению $3-3^x = 0$; $3^x = 3$; $x = 1$.

Ответ: 4.

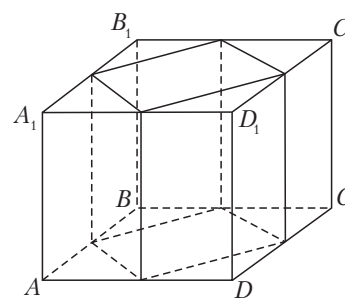
A6. Объем куба равен $4^3 = 64$.

Найдем объем образовавшейся четырехугольной призмы.

Высота призмы равна ребру куба, а сторона основания равна половине диагонали куба. Тогда ее объем равен $V = (2\sqrt{2})^2 \cdot 4 = 32$.

Найдем объем оставшейся части куба: $64 - 32 = 32$.

Ответ: 2.



A7. Область определения данной функции совпадает с множеством решений системы неравенств

$$\begin{cases} 9 - 3^{x^2-x} \geq 0, \\ x > 0; \end{cases} \begin{cases} 3^{x^2-x} \leq 9, \\ x > 0; \end{cases} \begin{cases} x^2 - x - 2 \leq 0, \\ x > 0; \end{cases} \begin{cases} x \in [-1; 2], \\ x > 0; \end{cases} \quad x \in (0; 2].$$

Ответ: 5.

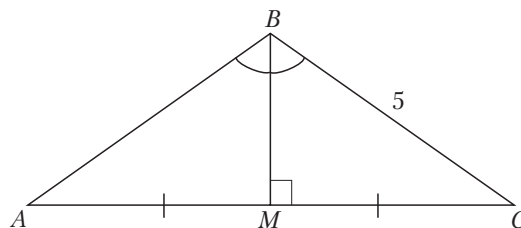
A8. По теореме косинусов $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2 \cdot AB \cdot BC \cdot \cos \angle ABC$; $AC^2 = 25 + 25 - 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot (-0,28) = 64$; $AC = 8$.

По свойству равнобедренного треугольника

$$AM = MC = \frac{1}{2} AC = 4.$$

По теореме Пифагора из прямоугольного треугольника BMC получим $BM = 3$. Тогда $S_{ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BM = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 3 = 12$.

С другой стороны, $S_{ABC} = \frac{1}{2} BC \cdot h$, где h — высота, проведенная к боковой стороне треугольника. То есть $12 = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot h$; $h = 4,8$.



Ответ: 3.

A9. Запишем уравнение в виде $\sqrt{2x+3} = \sqrt{7-x} + \sqrt{4-x}$ и возведем обе части в квадрат:

$$2x+3=7-x+2\cdot\sqrt{7-x}\cdot\sqrt{4-x}+4-x; \quad 2x-4=\sqrt{7-x}\cdot\sqrt{4-x};$$

$$(2x-4)^2=(7-x)(4-x); \quad 4x^2-16x+16=28-7x-4x+x^2; \quad 3x^2-5x-12=0; \quad \begin{cases} x=3, \\ x=-1\frac{1}{3}. \end{cases}$$

С помощью проверки убеждаемся, что корнем уравнения является число 3.

Ответ: 3.

Часть B

$$\begin{aligned} \text{B1. } \frac{22}{\pi} \arcsin\left(\cos \frac{35\pi}{11}\right) &= \frac{22}{\pi} \arcsin\left(\cos\left(2\pi + \frac{13\pi}{11}\right)\right) = \frac{22}{\pi} \arcsin\left(\cos \frac{13\pi}{11}\right) = \frac{22}{\pi} \arcsin\left(\cos\left(\pi + \frac{2\pi}{11}\right)\right) = \\ &= \frac{22}{\pi} \arcsin\left(-\cos \frac{2\pi}{11}\right) = -\frac{22}{\pi} \arcsin\left(\cos \frac{2\pi}{11}\right) = -\frac{22}{\pi} \arcsin\left(\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{7\pi}{22}\right)\right) = -\frac{22}{\pi} \arcsin\left(\sin \frac{7\pi}{22}\right) = \\ &= -\frac{22}{\pi} \arcsin\left(\sin \frac{7\pi}{22}\right) = -\frac{22}{\pi} \cdot \frac{7\pi}{22} = -7. \end{aligned}$$

Ответ: -7.

$$\text{B2. Данное уравнение равносильно совокупности } \begin{cases} 2 \cdot 4^{2x} - 17 \cdot 4^x + 8 = 0, \\ 1 - 2x \geq 0; \\ 1 - 2x = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} \begin{cases} 4^x = 8, \\ 4^x = \frac{1}{2}; \end{cases} \\ x \leq \frac{1}{2}; \\ x = \frac{1}{2}; \end{cases} \quad \begin{cases} \begin{cases} x = 1,5, \\ x = -\frac{1}{2}; \end{cases} \\ x \leq \frac{1}{2}; \\ x = \frac{1}{2}; \end{cases} \quad \begin{cases} x = -\frac{1}{2}, \\ x = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Сумма корней уравнения равна нулю.

Ответ: 0.

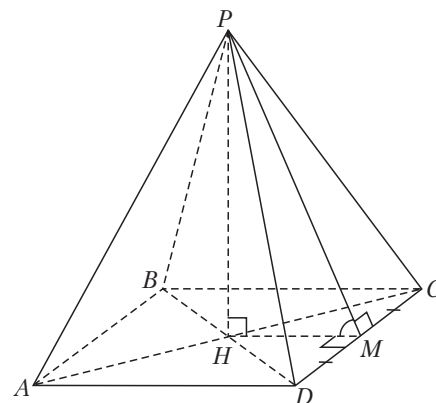
B3. Воспользуемся формулой $S_{\text{осн}} = S_{\text{бок}} \cdot \cos \alpha$.

Тогда $S_{\text{осн}} = 36\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 36$. Так как пирамида является правильной, то ее основание — квадрат. То есть $AB = 6$.

В прямоугольном треугольнике PMH известно, что $HM = \frac{1}{2}AB = 3$ и $\angle PMH = 45^\circ$, тогда $PH = 3$.

Найдем объем пирамиды: $V = \frac{1}{3} \cdot S_{\text{осн}} \cdot PH$; $V = \frac{1}{3} \cdot 36 \cdot 3 = 36$.

Ответ: 36.



$$\text{B4. } |x-12| \leq \frac{x}{12-x}; \quad |x-12| + \frac{x}{x-12} \leq 0; \quad \begin{cases} \begin{cases} x > 12, \\ x-12 + \frac{x}{x-12} \leq 0; \end{cases} \\ \begin{cases} x < 12, \\ -(x-12) + \frac{x}{x-12} \leq 0; \end{cases} \end{cases} \quad \begin{cases} \begin{cases} x > 12, \\ \frac{(x-12)^2 + x}{x-12} \leq 0; \end{cases} \\ \begin{cases} x < 12, \\ \frac{-(x-12)^2 + x}{x-12} \leq 0; \end{cases} \end{cases} \quad \begin{cases} \begin{cases} x > 12, \\ \frac{x^2 - 23x + 144}{x-12} \leq 0; \end{cases} \\ \begin{cases} x < 12, \\ \frac{x^2 - 25x + 144}{x-12} \geq 0; \end{cases} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x > 12, \\ x < 12; \\ \frac{(x-9)(x-16)}{x-12} \geq 0; \end{cases} \begin{cases} x < 12, \\ \frac{(x-9)(x-16)}{x-12} \geq 0; \end{cases} \begin{cases} x < 12, \\ x \in [9; 12) \cup [16; +\infty); \end{cases} x \in [9; 12).$$

Сумма целых решений неравенства равна $9+10+11=30$.

Ответ: 30.

$$\text{B5. } \operatorname{ctg}\left(\frac{7\pi}{5} - \frac{\pi x}{2}\right) = \operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{5} + \pi x\right); \operatorname{ctg}\left(\pi + \left(\frac{2\pi}{5} - \frac{\pi x}{2}\right)\right) = \operatorname{tg}\left(\pi - \left(\frac{2\pi}{5} - \pi x\right)\right); \operatorname{ctg}\left(\frac{2\pi}{5} - \frac{\pi x}{2}\right) + \operatorname{tg}\left(\frac{2\pi}{5} - \pi x\right) = 0;$$

$$\frac{\cos\left(\frac{2\pi}{5} - \frac{\pi x}{2}\right) \sin\left(\frac{2\pi}{5} - \pi x\right)}{\sin\left(\frac{2\pi}{5} - \frac{\pi x}{2}\right) \cos\left(\frac{2\pi}{5} - \pi x\right)} = 0; \frac{\cos\left(\frac{2\pi}{5} - \frac{\pi x}{2}\right) \cos\left(\frac{2\pi}{5} - \pi x\right) + \sin\left(\frac{2\pi}{5} - \pi x\right) \sin\left(\frac{2\pi}{5} - \frac{\pi x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{2\pi}{5} - \frac{\pi x}{2}\right) \cos\left(\frac{2\pi}{5} - \pi x\right)} = 0;$$

$$\frac{\cos\left(\frac{2\pi}{5} - \frac{\pi x}{2} - \left(\frac{2\pi}{5} - \pi x\right)\right)}{\sin\left(\frac{2\pi}{5} - \frac{\pi x}{2}\right) \cos\left(\frac{2\pi}{5} - \pi x\right)} = 0; \frac{\cos \frac{\pi x}{2}}{\sin\left(\frac{2\pi}{5} - \frac{\pi x}{2}\right) \cos\left(\frac{2\pi}{5} - \pi x\right)} = 0; \begin{cases} \cos \frac{\pi x}{2} = 0, \\ \sin\left(\frac{2\pi}{5} - \frac{\pi x}{2}\right) \neq 0, \\ \cos\left(\frac{2\pi}{5} - \pi x\right) \neq 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\pi x}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}, \\ \sin\left(\frac{2\pi}{5} - \frac{\pi x}{2}\right) \neq 0, \\ \cos\left(\frac{2\pi}{5} - \pi x\right) \neq 0; \end{cases} x = 1 + 2n, n \in \mathbb{Z}.$$

Первым положительным членом арифметической прогрессии $x_n = 1 + 2n$ является число 1, тогда 66-м членом этой прогрессии является число $1 + 2 \cdot 65 = 131$.

По формуле $S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$ найдем искомую сумму: $S_{66} = \frac{1+131}{2} \cdot 66 = 4356$.

Ответ: 4356.

B6. Так как правильная 9-угольная призма описана около шара, то высота призмы равна диаметру круга, вписанного в правильный 9-угольник, являющийся основанием призмы.

$$\angle AOB = \frac{360^\circ}{9} = 40^\circ.$$

Из прямоугольного треугольника OBH найдем $BH = r \operatorname{tg} 20^\circ$.

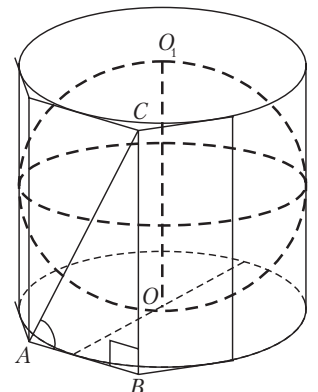
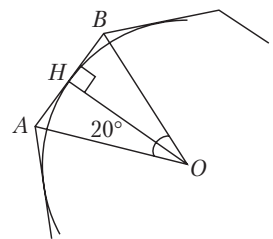
Тогда сторона основания призмы $AB = 2r \operatorname{tg} 20^\circ$.

В прямоугольном треугольнике ABC известно, что $CB = 2r$, а $AB = 2r \operatorname{tg} 20^\circ$.

$$\text{Тогда } \operatorname{tg} \angle CAB = \frac{CB}{AB} = \frac{2r}{2r \operatorname{tg} 20^\circ} = \frac{1}{\operatorname{tg} 20^\circ} = \operatorname{ctg} 20^\circ = \operatorname{tg} 70^\circ.$$

Таким образом, искомый угол равен 70° .

Ответ: 70.



ТЕСТ 28

Часть А

A1. Верным является утверждение $a - b < 0$, поскольку число a расположено на координатной прямой левее числа b .

Ответ: 3.

A2. $\frac{1}{5} \cdot 5^{15} = 5^{-1} \cdot 5^{15} = 5^{-1+15} = 5^{14}$.

Ответ: 2.

A3. $4\frac{1}{2} : 7\frac{1}{2} = x : 8\frac{1}{3}; \quad x = \frac{4\frac{1}{2} \cdot 8\frac{1}{3}}{7\frac{1}{2}}; \quad x = \frac{9}{2} \cdot \frac{25}{3} : \frac{15}{2}; \quad x = \frac{9}{2} \cdot \frac{25}{3} \cdot \frac{2}{15}; \quad x = 5.$

Ответ: 5.

A4. По формуле $S_{\text{кр}} = \pi r^2$ найдем радиус основания цилиндра: $\pi r^2 = 2\pi; \quad r = \sqrt{2}$.

Так как цилиндр является равносторонним, то его осевым сечением является квадрат со стороной, равной диаметру основания цилиндра.

Тогда площадь осевого сечения равна $(2\sqrt{2})^2 = 8$.

Ответ: 2.

A5. Область определения функции совпадает с множеством решений системы неравенств

$$\begin{cases} x^2 - 6x - 7 \geq 0, \\ 2 - 3x > 0; \end{cases} \quad \begin{cases} (x-7)(x+1) \geq 0, \\ x < 1,5; \end{cases} \quad \begin{cases} x \in (-\infty; -1] \cup [7; +\infty), \\ x < 1,5; \end{cases} \quad x \in (-\infty; -1].$$

Ответ: 1.

A6. Пусть x тыс. руб. — первоначальная сумма вклада, тогда после первого года вклад стал равен $1,03x$ тыс. руб., а после второго года — $1,03 \cdot (1,03x) = 1,0609x$ тыс. руб.

По условию задачи составим уравнение $1,0609x - x = 304,5; \quad 0,0609x = 304,5; \quad x = 5000$.

Ответ: 5.

A7. Пусть $AB = 9, \quad AC = 17$. Длина отрезка HM , соединяющего середины хорд AB и AC , равна 5.

В треугольнике ABC отрезок HM является средней линией, значит, $BC = 10$.

По теореме косинусов найдем косинус угла BAC :

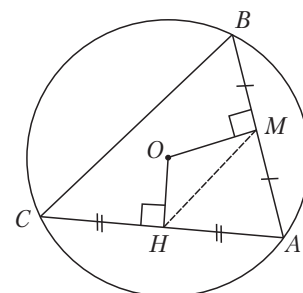
$$\cos \angle BAC = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2 \cdot AB \cdot AC}; \quad \cos \angle BAC = \frac{81 + 289 - 100}{2 \cdot 9 \cdot 17} = \frac{15}{17}.$$

По основному тригонометрическому тождеству найдем $\sin \angle BAC = \frac{8}{17}$.

Так как окружность описана около треугольника ABC , то

$$2R = \frac{CB}{\sin \angle BAC}; \quad R = \frac{5 \cdot 17}{8} = 10,625.$$

Ответ: 2.



A8. $\begin{cases} \frac{3^{x-y}}{3^{xy}} = \frac{1}{3}, \\ 2^x \cdot 2^y = 32; \end{cases} \quad \begin{cases} 3^{x-y-xy} = 3^{-1}, \\ 2^{x+y} = 2^5; \end{cases} \quad \begin{cases} x - y - xy = -1, \\ x + y = 5; \end{cases} \quad \begin{cases} x - (5-x) - x(5-x) = -1, \\ y = 5-x; \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 - 3x - 4 = 0, \\ y = 5-x; \end{cases} \quad \begin{cases} x = 4, \\ x = -1; \\ y = 5-x; \end{cases} \quad \begin{cases} x = 4, \\ y = 1; \\ x = -1, \\ y = 6. \end{cases}$

Ответ: 4.

$$\text{A9. } 2\operatorname{tg} x - 2\operatorname{ctg} x - 3 = 0; \quad 2\operatorname{tg} x - \frac{2}{\operatorname{tg} x} - 3 = 0; \quad 2\operatorname{tg}^2 x - 3\operatorname{tg} x - 2 = 0; \quad \begin{cases} \operatorname{tg} x = 2; \\ \operatorname{tg} x = -\frac{1}{2}. \end{cases}$$

Так как $\frac{\pi}{2} < x < \pi$, то $\operatorname{tg} x < 0$, значит, $\operatorname{tg} x = -\frac{1}{2}$.

По формуле $\operatorname{tg}^2 x + 1 = \frac{1}{\cos^2 x}$ получим $\cos^2 x = \frac{4}{5}$.

Воспользуемся формулой косинуса двойного угла: $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$; $\cos 2x = 2 \cdot \frac{4}{5} - 1 = 0,6$.

Ответ: 3.

Часть В

B1. Так как x_1 и x_2 — корни уравнения $x^2 + x + c = 0$, то по теореме Виета $x_1 + x_2 = -1$ и $x_1 \cdot x_2 = c$.

Преобразуем равенство: $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{1}{2}$; $\frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2} = \frac{1}{2}$. Тогда $\frac{-1}{c} = \frac{1}{2}$; $c = -2$.

При найденном значении c исходное уравнение имеет корни.

Ответ: -2.

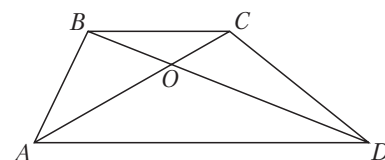
B2. Поскольку треугольники BOC и DOA подобны, то $\frac{S_{BOC}}{S_{DOA}} = \left(\frac{BC}{AD}\right)^2 = \frac{9}{16}$.

Так как $S_{ABO} = S_{COD}$ и $S_{ABO}^2 = S_{COB} \cdot S_{AOD}$, то

$$S_{ABO}^2 = \frac{9}{16} \cdot S_{AOD} \cdot S_{AOD}; \quad S_{AOD} = \frac{4}{3} S_{ABO}$$

$$\text{и } S_{BOC} = \frac{9}{16} S_{AOD} = \frac{9}{16} \cdot \frac{4}{3} S_{ABO} = \frac{3}{4} S_{ABO}.$$

$$S_{ABCD} = S_{ABO} + S_{BOC} + S_{COD} + S_{AOD}; \quad S_{ABCD} = S_{ABO} + \frac{3}{4} S_{ABO} + S_{ABO} + \frac{4}{3} S_{ABO}; \quad 98 = \frac{49}{12} S_{ABO}; \quad S_{ABO} = 24.$$



Ответ: 24.

$$\begin{aligned} \text{B3. } & 4^{\log_{0.25} 0.1} + \log_3 \frac{81}{\sqrt{7}-\sqrt{5}} + \log_{\frac{1}{9}} \frac{1}{12-2\sqrt{35}} = 4^{\log_4 10} + \log_3 \frac{81}{\sqrt{7}-\sqrt{5}} + \log_9 (12-2\sqrt{35}) = \\ & = 10 + \log_3 \frac{81}{\sqrt{7}-\sqrt{5}} + \log_{3^2} (\sqrt{7}-\sqrt{5})^2 = 10 + \log_3 \frac{81}{\sqrt{7}-\sqrt{5}} + \log_3 |\sqrt{7}-\sqrt{5}| = \\ & = 10 + \log_3 \frac{81}{\sqrt{7}-\sqrt{5}} + \log_3 (\sqrt{7}-\sqrt{5}) = 10 + \log_3 \left(\frac{81}{\sqrt{7}-\sqrt{5}} \cdot (\sqrt{7}-\sqrt{5}) \right) = 10 + \log_3 81 = 10 + 4 = 14. \end{aligned}$$

Ответ: 14.

B4. Пусть $AB = 12$, $BC = 8$ и $\angle CAB = x$, $\angle ACB = 2x$.

По теореме синусов

$$\frac{AB}{\sin \angle ACB} = \frac{BC}{\sin \angle CAB}; \quad \frac{12}{\sin 2x} = \frac{8}{\sin x};$$

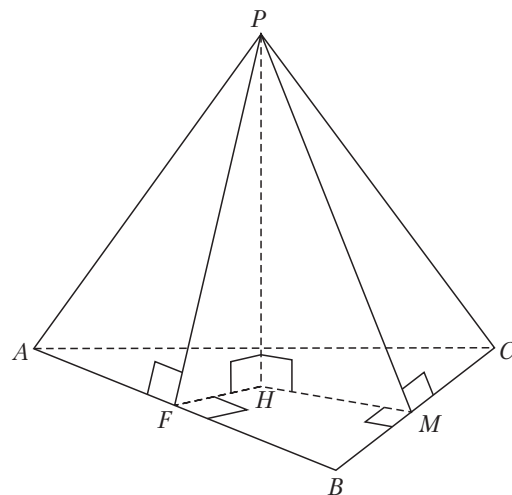
$$\frac{12}{2\sin x \cos x} = \frac{8}{\sin x}; \quad \cos x = \frac{3}{4}.$$

Воспользуемся теоремой косинусов и получим

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos \angle BAC;$$

$$64 = 144 + AC^2 - 2 \cdot 12 \cdot AC \cdot \frac{3}{4}; \quad AC^2 - 18 \cdot AC + 80 = 0.$$

То есть $AC = 8$ или $AC = 10$. Если $AC = 8$, то треугольник ABC — равнобедренный, тогда $\angle CAB = \angle ABC$, что противоречит условию задачи (треугольник ABC не является прямоугольным). Значит, $AC = 10$.



По формуле Герона $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ найдем площадь треугольника ABC :

$$S_{ABC} = \sqrt{15 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7} = 15\sqrt{7}.$$

Тогда радиус окружности, вписанной в треугольник ABC , равен $r = \frac{S_{ABC}}{p} = \frac{15\sqrt{7}}{15} = \sqrt{7}$.

Так как боковые грани пирамиды одинаково наклонены к основанию, то вершина пирамиды проектируется в центр вписанной в основание пирамиды окружности, и $S_{\text{осн}} = S_{\text{бок}} \cdot \cos \varphi$, где φ — угол наклона боковых граней к основанию пирамиды. Тогда $\cos \varphi = \frac{15\sqrt{7}}{60} = \frac{\sqrt{7}}{4}$.

В прямоугольном треугольнике PHM известно, что $\cos \angle PMH = \frac{\sqrt{7}}{4}$ и $HM = r = \sqrt{7}$. Тогда $PH = 3$ и объем пирамиды равен $V = \frac{1}{3} S_{\text{осн}} \cdot PH$; $V = \frac{1}{3} \cdot 15\sqrt{7} \cdot 3 = 15\sqrt{7}$.

Значение искомого выражения равно 105.

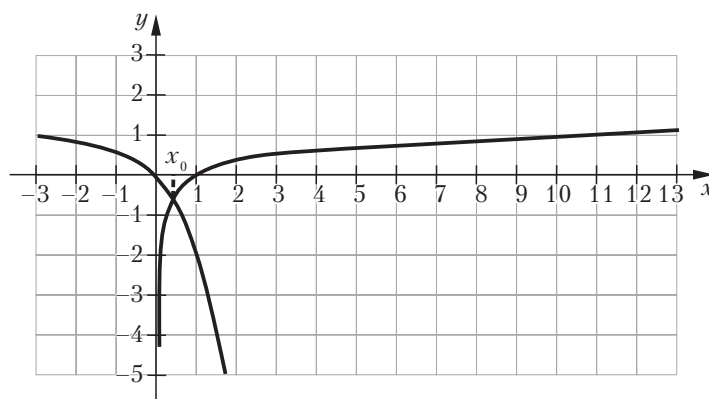
Ответ: 105.

B5. Запишем неравенство в виде $\lg x > 1 - 3^x$ и найдем, при каких значениях аргумента график функции $y = \lg x$ расположен выше графика функции $y = 1 - 3^x$.

Неравенство выполняется при $x \in (x_0; +\infty)$. Так как $0 < x_0 < 1$, то все целые числа из промежутка $[2; 100]$ удовлетворяют данному неравенству.

Таким образом, неравенство имеет 99 целых решений.

Ответ: 99.



B6. Пусть a, b, c — измерения прямоугольного параллелепипеда, а d — его диагональ. Так как диагональ прямоугольного параллелепипеда равна диаметру описанной около него сферы, то $d = 9$. Поскольку периметр основания параллелепипеда равен 16, то $a + b = 8$; $b = 8 - a$.

По формуле $d^2 = a^2 + b^2 + c^2$ получим, что

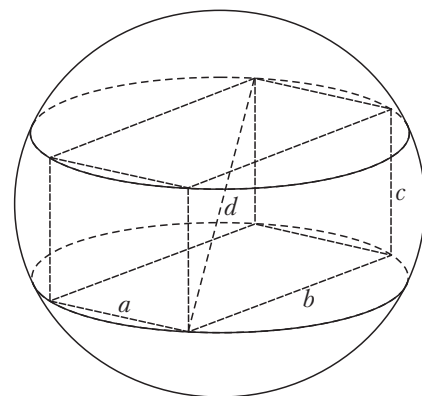
$$81 = a^2 + (8 - a)^2 + c^2; \quad c^2 = -2a^2 + 16a + 17.$$

$$S_{\text{бок}} = 2(a + b)c; \quad S_{\text{бок}} = 2 \cdot 8 \cdot \sqrt{-2a^2 + 16a + 17}.$$

Найдем, при каком значении a выражение $\sqrt{-2a^2 + 16a + 17}$ принимает свое наибольшее значение.

$\sqrt{-2a^2 + 16a + 17} = \sqrt{-2(a - 4)^2 + 49} \leq 7$, т. е. своего наибольшего значения, равного 7, выражение достигает при $a = 4$.

Тогда $b = 4$, $c = 7$ и $V = abc = 112$.



Ответ: 112.

ТЕСТ 29

Часть А

A1. Так как отрезок OE является средней линией треугольника SAC , то $OE \parallel SA$.

Прямая SA лежит в плоскости грани BAS , значит, $OE \parallel (SAB)$.

Ответ: 1.

A2. Найдем первое число: $11:0,05 = 220$. Тогда второе число равно $0,18 \cdot 220 = 39,6$.

Искомая разность равна: $220 - 39,6 = 180,4$.

Ответ: 4.

A3. Через точку $(3; -1)$ проходит график функции $y = \log_{0,3} x$, так как при $x = 3$ $y = \log_{0,3} 3 = \log_{\frac{1}{3}} 3 = -1$.

Ответ: 2.

A4. Так как среднее арифметическое пяти чисел равно 2,4, то их сумма равна: $2,4 \cdot 5 = 12$.

Поскольку среднее арифметическое трех других чисел равно 3,2, то их сумма равна: $3,2 \cdot 3 = 9,6$.

Найдем сумму восьми чисел: $12 + 9,6 = 21,6$ и их среднее арифметическое: $21,6 : 8 = 2,7$.

Ответ: 5.

A5. Так как треугольник ABC — равнобедренный, то

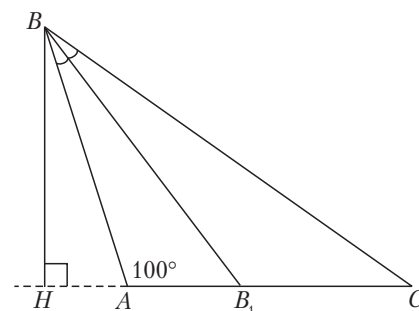
$$\angle ABC = \frac{180^\circ - 100^\circ}{2} = 40^\circ.$$

Тогда $\angle ABB_1 = \frac{1}{2} \angle ABC = 20^\circ$.

Из треугольника ABB_1 найдем: $\angle BB_1A = 180^\circ - (100^\circ + 20^\circ) = 60^\circ$.

Тогда в прямоугольном треугольнике HBB_1 получим, что

$$\angle HBB_1 = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ.$$



Ответ: 3.

A6. $49^{\frac{1}{6}} \cdot 7^{2,5} = 7^{\frac{1}{2}} \cdot 7^{\frac{2}{9}} \cdot 49 \cdot x^{0,5}; (7^2)^{\frac{1}{6}} \cdot 7^{2,5} = 7^{\frac{1}{2}} \cdot 7^{\frac{2}{9}} \cdot 7^2 \cdot x^{0,5}; 7^{\frac{1}{3}} \cdot 7^{2,5} = 7^{\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{9} + 2} \cdot x^{0,5}; 7^{\frac{2}{6}} = 7^{\frac{2}{18}} \cdot x^{0,5}; x^{0,5} = 7^{\frac{2}{6} - \frac{2}{18}};$
 $x^{0,5} = 7^{\frac{5}{9}}; x = \left(7^{\frac{5}{9}}\right)^2; x = 49^{\frac{5}{9}}.$

Ответ: 1.

A7. $\begin{cases} (7+x)^{-1} \geq \frac{1}{6}, \\ (7+x)^2 < 36; \end{cases} \begin{cases} \frac{1}{x+7} \geq \frac{1}{6}, \\ -6 < x+7 < 6; \end{cases} \begin{cases} \frac{1}{x+7} - \frac{1}{6} \geq 0, \\ -13 < x < -1; \end{cases} \begin{cases} \frac{x+1}{x+7} \leq 0, \\ -13 < x < -1; \end{cases} \begin{cases} x \in (-7; -1], \\ -13 < x < -1; \end{cases} x \in (-7; -1).$

Ответ: 4.

A8. Воспользуемся формулами преобразования произведения в сумму и получим

$$\frac{1}{2}(\cos 4x - \cos 8x) = \frac{1}{2}(\cos 2x + \cos 4x); \cos 4x - \cos 8x = \cos 2x + \cos 4x; \cos 8x + \cos 2x = 0.$$

По формулам преобразования суммы в произведение получим

$$2 \cos 5x \cos 3x = 0; \begin{cases} \cos 5x = 0, \\ \cos 3x = 0; \end{cases} \begin{cases} 5x = \frac{\pi}{2} + \pi n, \\ 3x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbf{Z}; \end{cases} \begin{cases} x = \frac{\pi}{10} + \frac{\pi n}{5}, \\ x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{3}, n \in \mathbf{Z}. \end{cases}$$

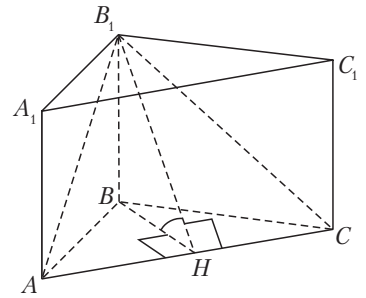
Наименьший положительный корень уравнения равен: $\frac{\pi}{10} = 18^\circ$.

Ответ: 4.

A9. Так как призма правильная, то треугольник ABC — равносторонний. По формуле $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ найдем высоту треугольника ABC : $BH = \sqrt{3}$.

В прямоугольном треугольнике BB_1H известно, что $BB_1 = 1$, $BH = \sqrt{3}$, тогда $\operatorname{tg} \angle BHB_1 = \frac{BB_1}{BH} = \frac{1}{\sqrt{3}}$, т. е. $\angle BHB_1 = 30^\circ$.

Ответ: 3.



Часть В

B1. $\frac{16}{(x+6)(x-1)} - \frac{20}{(x+2)(x+3)} = 1$; $\frac{16}{x^2+5x-6} - \frac{20}{x^2+5x+6} = 1$. Пусть $t = x^2 + 5x$, тогда уравнение принимает

$$\text{вид } \frac{16}{t-6} - \frac{20}{t+6} = 1; \frac{16(t+6) - 20(t-6) - (t-6)(t+6)}{(t-6)(t+6)} = 0; \frac{t^2 + 4t - 252}{(t-6)(t+6)} = 0; \begin{cases} t^2 + 4t - 252 = 0, \\ t \neq \pm 6; \end{cases} \begin{cases} t = -18, \\ t = 14; \end{cases} \begin{cases} t = -18, \\ t = 14. \end{cases}$$

То есть $\begin{cases} x^2 + 5x = -18, \\ x^2 + 5x = 14; \end{cases} \begin{cases} x^2 + 5x + 18 = 0, \\ x^2 + 5x - 14 = 0. \end{cases}$ Первое уравнение системы не имеет корней ($D < 0$), сумма корней второго уравнения системы равна -5 .

Ответ: -5 .

B2. $5^x + |x-4| - 5 > 5^{\log_5 |x-4|}$; $\begin{cases} 5^x + |x-4| - 5 > |x-4|, \\ |x-4| > 0; \end{cases} \begin{cases} 5^x > 5, \\ x \neq 4; \end{cases} \begin{cases} x > 1, \\ x \neq 4; \end{cases} x \in (1; 4) \cup (4; +\infty)$. Целыми решениями

данного неравенства на промежутке $[1; 5]$ являются числа 2; 3 и 5. Их сумма равна 10.

Ответ: 10.

B3. Шар с центром в точке O касается всех сторон равнобедренной трапеции $KPBT$ с основаниями $KT = 32$ и $PB = 18$.

Сечение шара плоскостью трапеции есть круг, вписанный в данную трапецию.

По свойству четырехугольника, описанного около круга, $KP + BT = PB + KT$; $KP + BT = 50$. Так как трапеция равнобедренная, то $KP = BT = 25$.

Радиус круга, вписанного в трапецию, равен половине высоты трапеции.

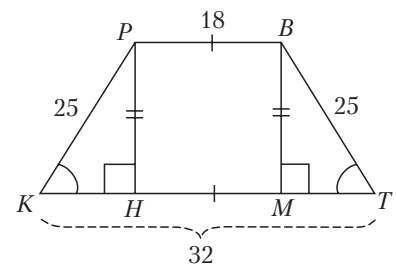
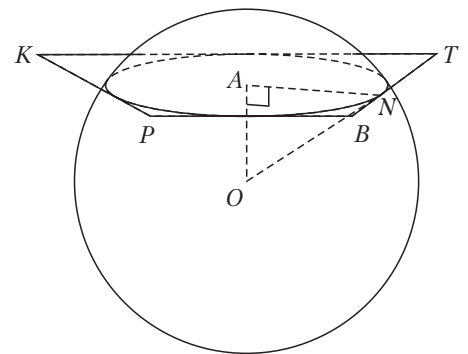
$$KH = \frac{KT - PB}{2} = 7.$$

По теореме Пифагора из прямоугольного треугольника KPH найдем: $PH = \sqrt{KP^2 - KH^2} = \sqrt{25^2 - 7^2} = 24$.

Тогда радиус круга, вписанного в трапецию, равен 12.

В прямоугольном треугольнике AON известно, что $AN = 12$; $ON = 37$. Тогда по теореме Пифагора $AO = 35$.

Ответ: 35.



B4. По свойству арифметической прогрессии

$$\lg(3^x - 3) = \frac{\lg 2 + \lg(3^x + 9)}{2}; \quad 2\lg(3^x - 3) = \lg(2 \cdot (3^x + 9)); \quad \begin{cases} \lg(3^x - 3)^2 = \lg(2 \cdot (3^x + 9)), \\ 3^x - 3 > 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} (3^x - 3)^2 = 2 \cdot (3^x + 9), \\ 3^x > 3; \end{cases} \begin{cases} 9^x - 6 \cdot 3^x + 9 = 2 \cdot 3^x + 18, \\ 3^x > 3; \end{cases} \begin{cases} 9^x - 8 \cdot 3^x - 9 = 0, \\ 3^x > 3; \end{cases} \begin{cases} 3^x = 9, \\ 3^x = -1; \quad 3^x = 9; \quad x = 2. \\ 3^x > 3; \end{cases}$$

Ответ: 2.

В5. Пусть x км/ч — скорость третьего велосипедиста.

Тогда $x = \frac{a}{t}$ и $x = \frac{b-a}{2}$, т. е. $\frac{a}{t} = \frac{b-a}{2}$.

Так как скорость первого велосипедиста равна 12 км/ч, то

$$12 = \frac{b}{t+4}; \quad b = 12t + 48.$$

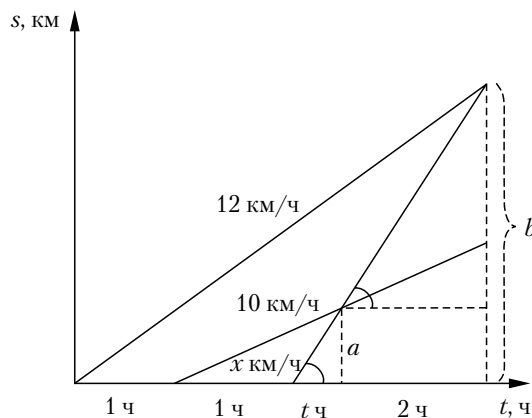
Поскольку второй велосипедист двигался со скоростью

$$10 \text{ км/ч, то } 10 = \frac{a}{t+1}; \quad a = 10t + 10.$$

$$\text{Значит, } \frac{10t+10}{t} = \frac{12t+48-(10t+10)}{2}; \quad t^2 + 9t - 10 = 0.$$

$$t = -10 \text{ или } t = 1.$$

По смыслу задачи $t = 1$, тогда $a = 20$, и скорость третьего велосипедиста равна 20 км/ч.



Ответ: 20.

$$\text{В6. } (4x - x^2 - 3) \cdot \log_2 (\cos^2 \pi x + 1) \geq 1.$$

Оценим выражения $(4x - x^2 - 3)$ и $\log_2 (\cos^2 \pi x + 1)$.

$$1) -x^2 + 4x - 3 = -(x^2 - 4x + 4) + 1 = -(x-2)^2 + 1 \leq 1 \text{ при } x \in \mathbf{R};$$

$$2) 0 \leq \cos^2 \pi x \leq 1; \quad 1 \leq \cos^2 \pi x + 1 \leq 2; \quad 0 \leq \log_2 (\cos^2 \pi x + 1) \leq 1;$$

$$3) \text{ таким образом, } (4x - x^2 - 3) \cdot \log_2 (\cos^2 \pi x + 1) \leq 1 \text{ при } x \in \mathbf{R}.$$

То есть неравенство $(4x - x^2 - 3) \cdot \log_2 (\cos^2 \pi x + 1) \geq 1$ равносильно равенству

$$(4x - x^2 - 3) \cdot \log_2 (\cos^2 \pi x + 1) = 1,$$

которое является верным, если

$$\begin{cases} 4x - x^2 - 3 = 1, \\ \log_2 (\cos^2 \pi x + 1) = 1; \end{cases} \begin{cases} x = 2, \\ \log_2 (\cos^2 \pi x + 1) = 1; \end{cases} \quad x = 2.$$

Ответ: 2.

ТЕСТ 30

Часть А

A1. Воспользуемся равенствами $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ и $a^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{a^n}$ и получим, что верным является равенство $a^{-\frac{3}{7}} = \frac{1}{\sqrt[7]{a^3}}$.

Ответ: 4.

A2. Число кратно 6, если оно четно и делится на 3.
Четными являются числа 852, 126, 714, 1603 и 282.
Из них на 3 делятся числа 852, 126, 714 и 282.

Ответ: 1.

A3. Пусть одна книга стоит x руб. Решим систему неравенств:

$$\begin{cases} 56\,000 < 9x < 57\,000, \\ 80\,000 < 13x < 81\,000; \end{cases} \begin{cases} 56\,000 < 9x < 57\,000, \\ 80\,000 < 13x < 81\,000; \end{cases} \begin{cases} 6222\frac{2}{9} < x < 6333\frac{1}{3}, \\ 6153\frac{11}{13} < x < 6230\frac{10}{13}; \end{cases} \quad 6222\frac{2}{9} < x < 6230\frac{10}{13}.$$

Из предложенных вариантов ответов данному неравенству удовлетворяет $x = 6230$.

Ответ: 3.

A4. Если парабола $y = ax^2 + bx + c$ проходит через точку $B(0; -5)$, то $c = -5$ и функция принимает вид $y = ax^2 + bx - 5$.

Поскольку вершиной параболы является точка $A(4; 11)$, то $-\frac{b}{2a} = 4$, т. е. $b = -8a$ и $y = ax^2 - 8ax - 5$.

График функции $y = ax^2 - 8ax - 5$ проходит через точку $A(4; 11)$, т. е. $11 = a \cdot 4^2 - 8a \cdot 4 - 5$; $16 = -16a$; $a = -1$ и $b = 8$.

Таким образом, искомая функция имеет вид $y = -x^2 + 8x - 5$.

Ответ: 3.

A5. По формуле $C = 2\pi R$ найдем радиус окружности: $8\pi\sqrt{3} = 2\pi R$; $R = 4\sqrt{3}$.

Хорда, стягивающая дугу 120° , является стороной правильного треугольника, вписанного в эту окружность. Воспользуемся формулой $a_3 = R\sqrt{3}$ и получим $a_3 = 4\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = 12$.

Ответ: 4.

A6. Преобразуем равенство:

$$\frac{3^x + 4^{x+1}}{3^{x-1} - 2 \cdot 4^{x+1}} = -\frac{4}{7}; \quad \frac{3^x + 4^x \cdot 4}{\frac{3^x}{3} - 2 \cdot 4^x \cdot 4} = -\frac{4}{7}; \quad \frac{4^x \cdot \left(\left(\frac{3}{4} \right)^x + 4 \right)}{4^x \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot \left(\frac{3}{4} \right)^x - 8 \right)} = -\frac{4}{7}; \quad \frac{0,75^x + 4}{\frac{1}{3} \cdot 0,75^x - 8} = -\frac{4}{7};$$

$$7 \cdot (0,75^x + 4) = -4 \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot 0,75^x - 8 \right); \quad 7 \cdot 0,75^x + 28 = -\frac{4}{3} \cdot 0,75^x + 32; \quad \frac{25}{3} \cdot 0,75^x = 4; \quad 0,75^x = \frac{12}{25}.$$

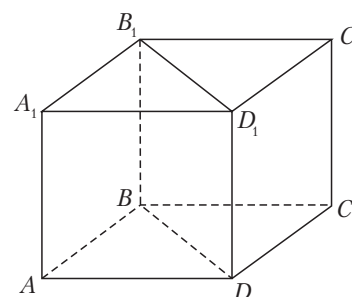
Ответ: 5.

A7. Пусть V — объем куба, тогда длина его ребра равна $a = \sqrt[3]{V}$, т. е.

$$a = \sqrt[3]{4\sqrt[4]{2}} = \sqrt[3]{\sqrt[4]{2^9}} = \sqrt[12]{2^9} = \sqrt[4]{2^3}.$$

Диагональным сечением куба является прямоугольник со сторонами a и $a\sqrt{2}$ и площадью $S = a^2\sqrt{2}$; $S = \left(\sqrt[4]{2^3} \right)^2 \cdot \sqrt{2} = \sqrt{2^3} \cdot \sqrt{2} = 4$.

Ответ: 3.



A8. По условию задачи $a_2 = 1,07 \cdot a_1$, т. е. $a_1 + d = 1,07 \cdot a_1$; $d = 0,07a_1$.

Найдем, сколько процентов от первого составляет десятый член этой прогрессии:

$$\frac{a_{10}}{a_1} \cdot 100\% = \frac{a_1 + 9d}{a_1} \cdot 100\% = \frac{a_1 + 9 \cdot 0,07a_1}{a_1} \cdot 100\% = \frac{1,63a_1}{a_1} \cdot 100\% = 163\%.$$

Ответ: 2.

A9. Сравним с 1 основание логарифма: $\sqrt{31} - \sqrt{21} \vee 1$; $\sqrt{31} \vee 1 + \sqrt{21}$; $(\sqrt{31})^2 \vee (1 + \sqrt{21})^2$; $31 \vee 1 + 2\sqrt{21} + 21$; $9 \vee 2\sqrt{21}$; $4,5 \vee \sqrt{21}$; $20,25 < 21$, значит, $\sqrt{31} - \sqrt{21} < 1$.

Тогда неравенство $\log_{\sqrt{31}-\sqrt{21}}(x^2 - 9) \geq 0$ равносильно:

$$\begin{cases} x^2 - 9 \leq 1, \\ x^2 - 9 > 0; \end{cases} \begin{cases} x^2 \leq 10, \\ x^2 > 9; \end{cases} \begin{cases} x \in [-\sqrt{10}; \sqrt{10}], \\ x \in (-\infty; -3) \cup (3; +\infty); \end{cases} x \in [-\sqrt{10}; -3) \cup (3; \sqrt{10}].$$

Ответ: 4.

Часть В

B1. Поскольку в основании правильной пирамиды находится равносторонний треугольник, то по формуле $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ найдем

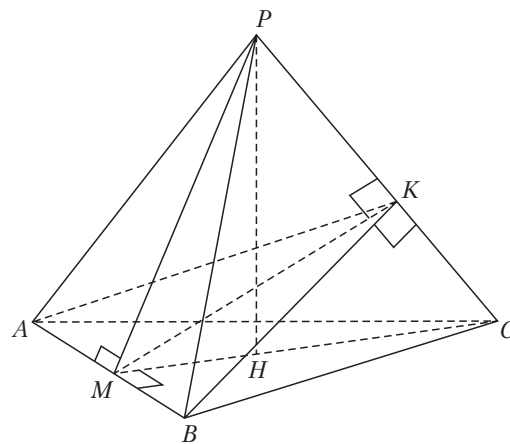
$$MC = \frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} \text{ и } HC = \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

В треугольнике ABK известно, что его площадь равна $\frac{12}{7}$, а $AB = 2$, тогда по формуле площади треугольника получим, что

$$MK = \frac{2S}{AB} = \frac{12}{7}.$$

В прямоугольном треугольнике MKC найдем:

$$\sin \angle KCM = \frac{MK}{MC} = \frac{\frac{12}{7}}{\sqrt{3}} = \frac{12}{7\sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{3}}{7}.$$



Поскольку пирамида правильная, то $\angle KCM$ — острый, тогда $\cos \angle KCM = \sqrt{1 - \sin^2 \angle KCM} = \sqrt{1 - \left(\frac{4\sqrt{3}}{7}\right)^2} = \frac{1}{7}$

и $\operatorname{tg} \angle KCM = 4\sqrt{3}$.

Из прямоугольного треугольника PHC найдем: $PH = HC \cdot \operatorname{tg} \angle KCM = \frac{2}{3}\sqrt{3} \cdot 4\sqrt{3} = 8$.

Ответ: 8.

B2. Запишем первое уравнение системы в виде $\frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2} + 2 \cdot \frac{x}{y} \cdot \frac{y}{x} - 2 \cdot \frac{x}{y} \cdot \frac{y}{x} = \frac{y}{x} + \frac{x}{y}$; $\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right)^2 - 2 = \frac{y}{x} + \frac{x}{y}$.

Пусть $t = \frac{y}{x} + \frac{x}{y}$, тогда уравнение принимает вид $t^2 - t - 2 = 0$; $\begin{cases} t = 2, \\ t = -1. \end{cases}$

$$\text{То есть } \begin{cases} \frac{y}{x} + \frac{x}{y} = 2, \\ \frac{y}{x} + \frac{x}{y} = -1. \end{cases}$$

По свойству двух взаимно обратных чисел получим, что второе уравнение совокуп-

ности не имеет решений, а равенство $\frac{y}{x} + \frac{x}{y} = 2$ выполняется только при $x = y$.

То есть исходная система равносильна системе $\begin{cases} x = y, \\ x^2 + y^2 = 2; \end{cases} \begin{cases} x = y, \\ 2y^2 = 2; \end{cases} \begin{cases} x = y, \\ y = \pm 1; \end{cases} \begin{cases} x = \pm 1, \\ y = \pm 1. \end{cases}$

Таким образом, решениями системы являются пары чисел $(1; 1); (-1; -1)$. Система имеет два решения.

Ответ: 2.

В3. Так как синусы углов при основании трапеции равны, то трапеция является равнобедренной.

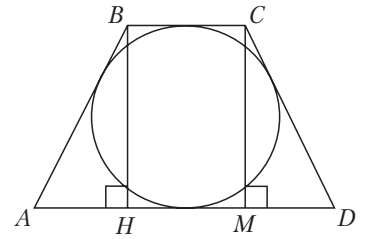
Пусть h — высота трапеции.

Так как $\sin \angle A = 0,8$, то из прямоугольного треугольника ABH найдем, что

$$AB = \frac{5h}{4}. \text{ Тогда по теореме Пифагора } AH = \sqrt{AB^2 - BH^2} = \sqrt{\frac{25h^2}{16} - h^2} = \frac{3h}{4}.$$

Так как трапеция описана около окружности, то $AB + CD = BC + AD$, т. е.

$$\frac{5h}{4} + \frac{5h}{4} = 2 \cdot BC + \frac{3h}{4} + \frac{3h}{4}; \quad BC = HM = \frac{h}{2}.$$



По формуле площади трапеции получим, что $S_{ABCD} = \frac{AD + BC}{2} \cdot BH$; $20 = \frac{2h + \frac{h}{2}}{2} \cdot h$; $h^2 = 16$; $h = 4$.

Тогда длина средней линии трапеции равна: $\frac{AD + BC}{2} = \frac{2,5h}{2} = \frac{2,5 \cdot 4}{2} = 5$.

Ответ: 5.

$$\text{В4. } \frac{1 + 2\sin^2 x - 3\sqrt{2}\sin x + \sin 2x}{\sin 2x - 1} - 1 = 0; \quad \frac{1 + 2\sin^2 x - 3\sqrt{2}\sin x + \sin 2x - \sin 2x + 1}{\sin 2x - 1} = 0;$$

$$\frac{2\sin^2 x - 3\sqrt{2}\sin x + 2}{\sin 2x - 1} = 0; \quad \begin{cases} 2\sin^2 x - 3\sqrt{2}\sin x + 2 = 0, \\ \sin 2x \neq 1; \end{cases} \quad \begin{cases} \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}, \\ \sin x = \sqrt{2}; \\ \sin 2x \neq 1. \end{cases}$$

Второе уравнение совокупности не имеет корней, так как $\sqrt{2} > 1$.

$$\text{Решим систему: } \begin{cases} \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}, \\ \sin 2x \neq 1; \end{cases} \quad \begin{cases} x = (-1)^n \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}, \\ 2x \neq \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}; \end{cases} \quad \begin{cases} x = (-1)^n \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}, \\ x \neq \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}; \end{cases} \quad x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

Наименьший положительный корень данного уравнения равен 135° .

Ответ: 135.

$$\text{В5. } \frac{1}{2} \log_{\sqrt{3}}^2(2x+3) - \log_3(2x+3) \cdot \log_3(x+\sqrt{3})^3 = 2 \log_3^2(x+\sqrt{3});$$

$$2 \log_3^2(2x+3) - 3 \log_3(2x+3) \cdot \log_3(x+\sqrt{3}) - 2 \log_3^2(x+\sqrt{3}) = 0.$$

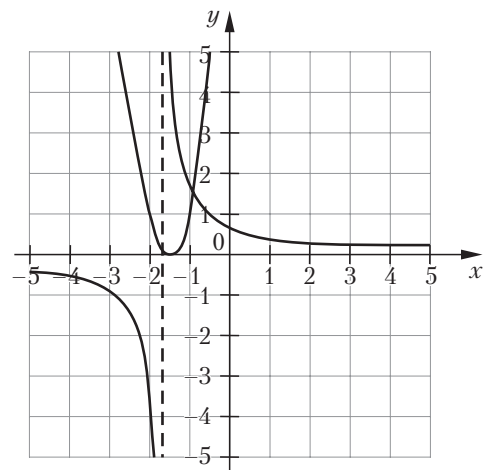
Пусть $a = \log_3(2x+3)$; $b = \log_3(x+\sqrt{3})$, тогда уравнение принимает вид $2a^2 - 3ab - 2b^2 = 0$.

Рассматривая полученное уравнение как квадратное относительно

$$\text{но } a, \text{ получим } \begin{cases} a = 2b, \\ a = -\frac{b}{2}. \end{cases}$$

$$\text{То есть } \begin{cases} \log_3(2x+3) = 2 \log_3(x+\sqrt{3}), \\ \log_3(2x+3) = -\frac{1}{2} \log_3(x+\sqrt{3}); \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x+3 = (x+\sqrt{3})^2, \\ (2x+3)^2 = \frac{1}{x+\sqrt{3}}; \\ x > -1,5; \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 + (2+2\sqrt{3})x = 0, \\ (2x+3)^2 = \frac{1}{x+\sqrt{3}}; \\ x > -1,5. \end{cases}$$



Первое уравнение совокупности имеет корни $x=0$ и $x=-2-2\sqrt{3}$. Условию $x > -1,5$ удовлетворяет $x=0$.

С помощью графиков функций $y=(2x+3)^2$ и $y=\frac{1}{x+\sqrt{3}}$ убедимся, что уравнение $(2x+3)^2=\frac{1}{x+\sqrt{3}}$ имеет единственный корень (поскольку графики функций имеют только одну общую точку), причем этот корень удовлетворяет условию $x > -1,5$.

Таким образом, уравнение имеет два корня.

Ответ: 2.

В6. Представим функцию в виде

$$f(x) = \sqrt{3^2 + x^2 - 2 \cdot 3 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} x} + \sqrt{4^2 + x^2 - 2 \cdot 4 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} x}$$

$$\text{или } f(x) = \sqrt{3^2 + x^2 - 2 \cdot 3 \cdot x \cdot \cos 45^\circ} + \sqrt{4^2 + x^2 - 2 \cdot 4 \cdot x \cdot \cos 45^\circ}.$$

Выражение $\sqrt{3^2 + x^2 - 2 \cdot 3 \cdot x \cdot \cos 45^\circ}$ можно рассматривать как длину стороны BC треугольника с двумя другими сторонами, равными $AB=3$ и $AC=x$, причем угол между этими сторонами составляет 45° . Рассуждая аналогично, получим треугольник ACD , в котором

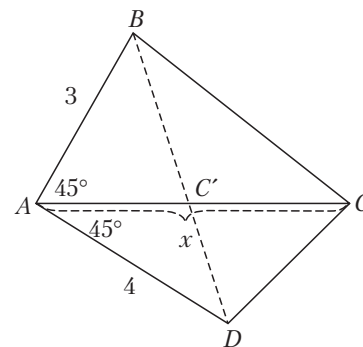
$$AC=x; AD=4; \angle CAD=45^\circ, \text{ а } CD=\sqrt{4^2 + x^2 - 2 \cdot 4 \cdot x \cdot \cos 45^\circ}.$$

Тогда сумму $\sqrt{3^2 + x^2 - 2 \cdot 3 \cdot x \cdot \cos 45^\circ} + \sqrt{4^2 + x^2 - 2 \cdot 4 \cdot x \cdot \cos 45^\circ}$ можно рассматривать как сумму длин отрезков BC и CD .

Очевидно, что сумма длин отрезков BC и CD будет наименьшей, если точки B , C и D будут лежать на одной прямой, т. е. $C' \in BD$.

Из прямоугольного треугольника ABD найдем длину отрезка BD по теореме Пифагора $BD=5$.

Ответ: 5.



ТЕСТ 31

Часть А

A1. Так как встреча пешеходов произошла через 1 ч 30 мин после начала движения, значит, в течение этого времени первый пешеход был ближе к А, чем второй.

Ответ: 1.

A2. При вращении квадрата вокруг одной из сторон образуется цилиндр, образующая и радиус основания которого равны 6.

По формуле $V = \pi r^2 h$ найдем объем цилиндра: $V = \pi \cdot 6^2 \cdot 6 = 216\pi$.

Ответ: 4.

$$\begin{aligned} \text{A3. } 2c - (3c + (2c - (c + 1)) + 3) &= 2c - (3c + (2c - c - 1) + 3) = \\ &= 2c - (3c + (c - 1) + 3) = 2c - (3c + c - 1 + 3) = 2c - (4c + 2) = 2c - 4c - 2 = -2c - 2. \end{aligned}$$

Ответ: 5.

$$\text{A4. } P_1 - P_2 = (5 + x + y) - (3 + x + y) = 2.$$

Ответ: 4.

$$\text{A5. } 4^x \cdot 5^x = 6^x; \quad 20^x = 6^x; \quad \left(\frac{20}{6}\right)^x = 1; \quad x = 0; \quad 0 \in (-0,1; 0,5).$$

Ответ: 3.

A6. Воспользуемся методом интервалов:

$$|x^3 - 1| \cdot (x + 3) \leq 0 \quad \begin{array}{c} - \quad + \quad + \\ \bullet \quad \bullet \\ -3 \quad 1 \end{array} \quad x \in (-\infty; -3] \cup \{1\}.$$

Ответ: 2.

$$\text{A7. } (25^{1+\sqrt{2}} - 5^{2\sqrt{2}}) \cdot 5^{-1-2\sqrt{2}} = (5^{2+2\sqrt{2}} - 5^{2\sqrt{2}}) \cdot 5^{-1-2\sqrt{2}} = 5^{2\sqrt{2}} \cdot (5^2 - 1) \cdot 5^{-1-2\sqrt{2}} = 5^{2\sqrt{2}-1-2\sqrt{2}} \cdot (5^2 - 1) = 5^{-1} \cdot 24 = \frac{24}{5}.$$

Ответ: 2.

A8. Так как функция $y = f(x)$ определена на всей числовой прямой и является периодической с периодом 4, то $f(x_0) = f(x_0 + 4 \cdot n)$, где $n \in \mathbf{Z}$, $x_0 \in \mathbf{R}$.

Тогда

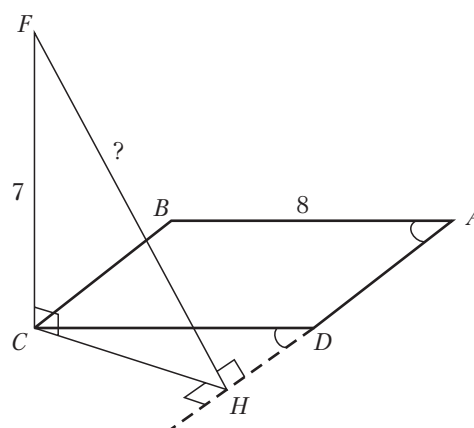
$$f(7) = f(-1 + 4 \cdot 2) = f(-1) = 3; \quad f(-4) = f(-4 + 4 \cdot 1) = f(0) = 2;$$

$$f(-10) = f(2 + 4 \cdot (-3)) = f(2) = -2.$$

Найдем значение выражения:

$$(f(7) + 2 \cdot f(-4)) \cdot f(-10) = (3 + 2 \cdot 2) \cdot (-2) = -14.$$

Ответ: 5.



A9. Расстояние от точки F до прямой AD равно длине отрезка FH.

В прямоугольном треугольнике CDH известно, что $\angle CDH = 45^\circ$, $CD = 8$, тогда $CH = 4\sqrt{2}$.

По теореме Пифагора из прямоугольного треугольника FCH получим, что

$$FH = \sqrt{FC^2 + CH^2} = \sqrt{7^2 + (4\sqrt{2})^2} = 9.$$

Ответ: 1.

B1. $\left(\frac{|x|+x}{x-3}\right)^2 - \frac{12x}{x-3} + 5 = 0.$

1) Если $x \geq 0$, то $\left(\frac{2x}{x-3}\right)^2 - \frac{12x}{x-3} + 5 = 0; \frac{4x^2 - 12x(x-3) + 5(x-3)^2}{(x-3)^2} = 0; \frac{x^2 - 2x - 15}{(x-3)^2} = 0; \begin{cases} x^2 - 2x - 15 = 0, \\ x \neq 3; \end{cases}$

$\begin{cases} x = 5, \\ x = -3; \end{cases} \begin{cases} x = 5, \\ x = -3. \end{cases}$ Так как $x \geq 0$, то $x = 5$.

2) Если $x < 0$, то $\left(\frac{x-x}{x-3}\right)^2 - \frac{12x}{x-3} + 5 = 0; \begin{cases} \frac{12x}{x-3} = 5, \\ x \neq 3; \end{cases} \begin{cases} x = -\frac{15}{7}, \\ x = -\frac{15}{7}. \end{cases}$ Тогда $3x_1 \cdot \frac{1}{x_2} = 3 \cdot 5 \cdot \frac{1}{-\frac{15}{7}} = -7$.

Ответ: -7 .

B2. $\sqrt{2-2^{x^2}} \cdot \sin \pi x = 0; \begin{cases} 2-2^{x^2} \geq 0, \\ \sin \pi x = 0; \\ 2-2^{x^2} = 0; \end{cases} \begin{cases} 2^{x^2} \leq 2, \\ \pi x = \pi n, n \in \mathbf{Z}; \\ 2^{x^2} = 2; \end{cases} \begin{cases} x^2 \leq 1, \\ x = n, n \in \mathbf{Z}; \\ x^2 = 1; \end{cases} \begin{cases} -1 \leq x \leq 1, \\ x = n, n \in \mathbf{Z}; \\ x = \pm 1; \end{cases} x = -1; 0; 1.$

Таким образом, уравнение имеет три корня.

Ответ: 3.

B3. Через центр окружности проведем отрезок MN перпендикулярно хордам AB и CD .

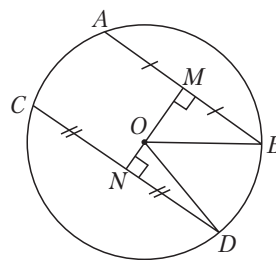
По свойству хорд $MB = \frac{AB}{2} = 6$ и $ND = \frac{CD}{2} = 8$.

Пусть $ON = x$, тогда $OM = 14 - x$.

По теореме Пифагора в прямоугольных треугольниках MOB и NDO получим $OB^2 = MO^2 + MB^2$ и $OD^2 = NO^2 + ND^2$.

Поскольку $OB = OD$ как радиусы окружности, то $MO^2 + MB^2 = NO^2 + ND^2$, т. е. $(14-x)^2 + 36 = x^2 + 64; x = 6$.

Тогда $OD^2 = NO^2 + ND^2; OD^2 = 36 + 64; OD = 10$.



Ответ: 10.

B4. $\begin{cases} \log_5 x + \log_5 7 \cdot \log_7 y = 1 + \log_5 2, \\ 3 + 2\log_2 y = \log_2 5 \cdot (2 + 3\log_5 x); \end{cases} \begin{cases} \log_5 x + \log_5 7^{\log_7 y} = 1 + \log_5 2, \\ \frac{3}{\log_2 5} + \frac{2\log_2 y}{\log_2 5} = 2 + 3\log_5 x; \end{cases} \begin{cases} \log_5 x + \log_5 y = 1 + \log_5 2, \\ 3\log_5 2 + 2\log_5 y = 2 + 3\log_5 x; \end{cases}$

$\begin{cases} \log_5 x + \log_5 y = 1 + \log_5 2, \\ 2\log_5 y - 3\log_5 x = 2 - 3\log_5 2; \end{cases} \begin{cases} 3\log_5 x + 3\log_5 y = 3 + 3\log_5 2, \\ 2\log_5 y - 3\log_5 x = 2 - 3\log_5 2; \end{cases} \begin{cases} 5\log_5 y = 5, \\ \log_5 x + \log_5 y = 1 + \log_5 2; \end{cases}$

$\begin{cases} \log_5 y = 1, \\ \log_5 x = \log_5 2; \end{cases} \begin{cases} y = 5, \\ x = 2. \end{cases}$ Тогда $x_0 + y_0 = 2 + 5 = 7$.

Ответ: 7.

B5. Сумма первых одиннадцати членов данной прогрессии равна: $S_{11} = \frac{b_1(q^{11}-1)}{q-1}$.

Сумма последних одиннадцати членов данной прогрессии равна: $S'_{11} = \frac{b_1 \cdot q^{n-11}(q^{11}-1)}{q-1}$.

Так как отношение суммы первых 11 членов к сумме последних 11 членов равно $\frac{1}{8}$, то

$\frac{b_1(q^{11}-1)}{q-1} : \frac{b_1 \cdot q^{n-11}(q^{11}-1)}{q-1} = \frac{1}{8}; q^{n-11} = 8.$

Сумма всех членов данной прогрессии без первых девяти равна: $S'_{n-9} = \frac{b_1 \cdot q^9 \cdot (q^{n-9} - 1)}{q - 1}$.

Сумма всех членов данной прогрессии без последних девяти равна: $S_{n-9} = \frac{b_1 (q^{n-9} - 1)}{q - 1}$.

Поскольку отношение суммы всех членов без первых девяти к сумме всех членов без последних девяти равно 2, то $\frac{b_1 \cdot q^9 \cdot (q^{n-9} - 1)}{q - 1} : \frac{b_1 (q^{n-9} - 1)}{q - 1} = 2$; $q^9 = 2$; $q = 2^{\frac{1}{9}}$.

Тогда $\left(2^{\frac{1}{9}}\right)^{n-11} = 8$; $2^{\frac{n-11}{9}} = 2^3$; $\frac{n-11}{9} = 3$; $n = 38$.

Ответ: 38.

В6. Выражение $\log_2 x + 6 \log_{x^2} 2 + \sqrt{x^2 + x - 2}$ определено, если

$$\begin{cases} x^2 + x - 2 \geq 0, \\ x > 0, \\ x \neq \pm 1; \end{cases} \begin{cases} x \in (-\infty; -2] \cup [1; +\infty), \\ x > 0, \\ x \neq \pm 1; \end{cases} \quad x \in (1; +\infty).$$

Докажем, что исходное неравенство выполняется при всех $x \in (1; +\infty)$.

$$\log_2 x + 6 \log_{x^2} 2 + \sqrt{x^2 + x - 2} > 3; \quad \log_2 x - 3 + \frac{3}{\log_2 x} + \sqrt{x^2 + x - 2} > 0;$$

$$\frac{\log_2^2 x - 3 \log_2 x + 3}{\log_2 x} + \sqrt{x^2 + x - 2} > 0; \quad \frac{(\log_2 x - 1,5)^2 + 0,75}{\log_2 x} + \sqrt{x^2 + x - 2} > 0.$$

Так как $\frac{(\log_2 x - 1,5)^2 + 0,75}{\log_2 x} > 0$ и $\sqrt{x^2 + x - 2} > 0$ при $x \in (1; +\infty)$, то неравенство

$$\frac{(\log_2 x - 1,5)^2 + 0,75}{\log_2 x} + \sqrt{x^2 + x - 2} > 0$$

верно на промежутке $(1; +\infty)$.

Таким образом, наименьшим целым решением данного неравенства является число 2.

Ответ: 2.

ТЕСТ 32

Часть А

A1. Если $b < 0$, то $-b > 0$, тогда $-b\sqrt[4]{5} = \sqrt[4]{5b^4}$.

Ответ: 3.

A2. Линейными углами двугранных улов, образованных боковыми гранями шестиугольной призмы, являются углы правильного многоугольника, лежащего в основании этой призмы. Градусную меру внутреннего угла правильного шестиугольника найдем по формуле $\alpha_n = \frac{(n-2) \cdot 180^\circ}{n}$, т. е. искомый угол равен

$$\frac{(6-2) \cdot 180^\circ}{6} = 120^\circ.$$

Ответ: 4.

A3. $\frac{4^{n+1} - 4^{n-1}}{4^{n-2}} = \frac{4^{n-2} \cdot (4^3 - 4^1)}{4^{n-2}} = 4^3 - 4 = 60.$

Ответ: 1.

A4. Пусть x — первоначальная цена товара. После того как цена возросла на 20 %, товар стал стоить $(1,2x)$. После снижения на 10 % цена товара стала $0,9 \cdot (1,2x) = 1,08x$.

Таким образом, цена товара повысилась на 8 % по сравнению с первоначальной.

Ответ: 3.

A5. При $x < 0$ график функции $y = a^x$ проходит ниже прямой $y = 1$, если $a > 1$.

Сравним значения предложенных выражений с единицей:

1) $\pi - 3 \approx 0,14 < 1$;

2) $\frac{1}{\pi} < 1$;

3) $2 \cdot \cos 61^\circ < 2 \cdot \cos 60^\circ = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1$;

4) $\cos 2 < 1$;

5) $\pi - 2 \approx 1,14 > 1$.

Таким образом, $a = \pi - 2$.

Ответ: 5.

A6. $(\sqrt{7} - 3)^2 (16 + 6\sqrt{7}) - 4 \cdot \sqrt{3 \frac{1}{16}} = (7 - 6\sqrt{7} + 9)(16 + 6\sqrt{7}) - 4 \cdot \sqrt{\frac{49}{16}} = (16 - 6\sqrt{7})(16 + 6\sqrt{7}) - 4 \cdot \frac{7}{4} =$
 $= 16^2 - (6\sqrt{7})^2 - 7 = 256 - 252 - 7 = -3.$

Ответ: 1.

A7. Пусть $t = (x - \sqrt{3})^2$, тогда уравнение принимает вид $t^2 - 5t + 4 = 0$; $\begin{cases} t = 1, \\ t = 4. \end{cases}$

$$\text{То есть } \begin{cases} (x - \sqrt{3})^2 = 1, \\ (x - \sqrt{3})^2 = 4; \end{cases} \quad \begin{cases} x - \sqrt{3} = 1, \\ x - \sqrt{3} = -1, \\ x - \sqrt{3} = 2, \\ x - \sqrt{3} = -2; \end{cases} \quad \begin{cases} x = \sqrt{3} + 1, \\ x = \sqrt{3} - 1, \\ x = \sqrt{3} + 2, \\ x = \sqrt{3} - 2. \end{cases}$$

Сумма корней уравнения равна $4\sqrt{3}$.

Ответ: 2.

A8. $\frac{3}{7}(\log_2 32 + 27^{\log_3 4})^{\log_{69} 14} = \frac{3}{7}(5 + 3^{3\log_3 4})^{\log_{69} 14} = \frac{3}{7}(5 + 3^{\log_3 64})^{\log_{69} 14} = \frac{3}{7}(5 + 64)^{\log_{69} 14} = \frac{3}{7} \cdot 69^{\log_{69} 14} = \frac{3}{7} \cdot 14 = 6.$

Ответ: 5.

A9. Так как угол при вершине осевого сечения конуса равен 60° , то треугольник APB — равносторонний.

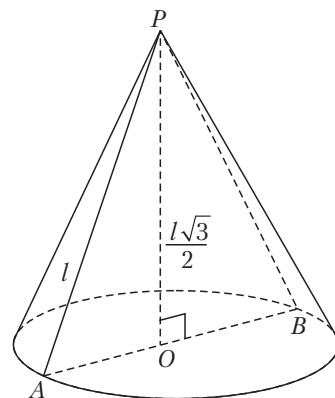
Пусть образующая конуса $PA = l$, тогда $PO = \frac{l\sqrt{3}}{2}$.

По условию задачи $PA + PO = 2$, т. е. в прямоугольном треугольнике APO угол APO равен 30° .

Найдем радиус основания конуса: $r = AO = \frac{1}{2}AP = \frac{4(2-\sqrt{3})}{2} = 2(2-\sqrt{3})$.

$$S_{\text{полн}} = \pi r(r+l); \quad S_{\text{полн}} = \pi \cdot 2(2-\sqrt{3})(2(2-\sqrt{3}) + 4(2-\sqrt{3}));$$

$$S_{\text{полн}} = \pi \cdot 12(2-\sqrt{3})^2; \quad S_{\text{полн}} = \pi \cdot 12(4-4\sqrt{3}+3); \quad S_{\text{полн}} = 12\pi(7-4\sqrt{3}).$$



Ответ: 2.

Часть B

B1. $\sin 2x + 4 \cos x - \frac{1}{2} \sin x = 1; \quad 2 \sin x \cos x + 4 \cos x - \frac{1}{2} \sin x - 1 = 0;$

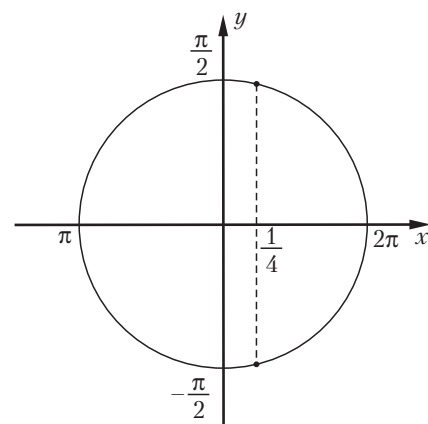
$$2 \cos x (\sin x + 2) - \frac{1}{2} (\sin x + 2) = 0; \quad (\sin x + 2) \left(2 \cos x - \frac{1}{2} \right) = 0;$$

$$\begin{cases} \sin x + 2 = 0, \\ 2 \cos x - \frac{1}{2} = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} \sin x = -2 \notin [-1; 1], \\ \cos x = \frac{1}{4}; \end{cases} \quad \cos x = \frac{1}{4}.$$

На промежутке длиной 2π уравнение $\cos x = \frac{1}{4}$ имеет два корня.

Длина промежутка $[-3\pi; 5\pi]$ равна 8π , значит, на данном промежутке уравнение имеет 8 корней.

Ответ: 8.



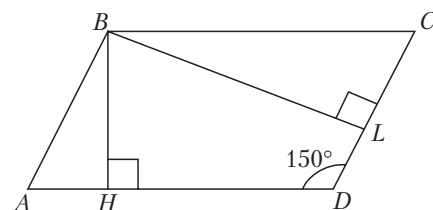
B2. Так как $\angle D = 150^\circ$, тогда $\angle A = \angle C = 30^\circ$.

Пусть $BH = a$, тогда $BL = 10 - a$.

В прямоугольных треугольниках ABH и BCL катеты BH и BL лежат против углов в 30° , тогда $AB = 2BH = 2a$ и $BC = 2BL = 20 - 2a$.

Периметр параллелограмма равен:

$$P_{ABCD} = 2 \cdot (AB + BC) = 2 \cdot (2a + 20 - 2a) = 40.$$



Ответ: 40.

B3. Упростим выражение $\sqrt{3+\sqrt{8}} - 1 = \sqrt{3+2\sqrt{2}} - 1 = \sqrt{(\sqrt{2}+1)^2} - 1 = |\sqrt{2}+1| - 1 = \sqrt{2}+1-1 = \sqrt{2}$.

Тогда неравенство принимает вид $(\sqrt[3]{2})^{x^2+4x+1} - (\sqrt{2})^x \leq 0; \quad (\sqrt[3]{2})^{x^2+4x+1} \leq (\sqrt{2})^x; \quad 2^{\frac{x^2+4x+1}{3}} \leq 2^{\frac{x}{2}};$

$$\frac{x^2+4x+1}{3} \leq \frac{x}{2}; \quad 2x^2+8x+2 \leq 3x; \quad 2x^2+5x+2 \leq 0; \quad x \in \left[-2; -\frac{1}{2}\right].$$

Произведение наибольшего и наименьшего решений неравенства равно $-2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = 1$.

Ответ: 1.

B4. Так как $a_7 = 9$, то $a_1 = a_7 - 6d = 9 - 6d$ и $a_2 = a_7 - 5d = 9 - 5d$.

Тогда $a_1 \cdot a_2 \cdot a_7 = (9-6d)(9-5d) \cdot 9 = 9 \cdot 3 \cdot (3-2d)(9-5d) = 27 \cdot (3-2d)(9-5d) = 27 \cdot (10d^2 - 33d + 27)$.

Рассмотрим квадратичную функцию $f(d) = 10d^2 - 33d + 27$.

Данная функция принимает свое наименьшее значение в вершине параболы.

Найдем абсциссу вершины параболы: $d_{\min} = -\frac{b}{2a} = \frac{33}{20}$.

Тогда $20 \cdot d_{\min} = 33$.

Ответ: 33.

В5. Пусть $x^2 - 2 = t$, тогда уравнение принимает вид $\frac{t^2 - xt + x^2}{2t^2 + xt - x^2} = \frac{1}{2}$, $\begin{cases} 2t^2 - 2xt + 2x^2 = 2t^2 + xt - x^2, \\ 2t^2 + xt - x^2 \neq 0; \end{cases}$

$$\begin{cases} x^2 - xt = 0, \\ (x - 2t)(x + t) \neq 0; \end{cases} \begin{cases} \begin{cases} x = 0, \\ x = t; \end{cases} \\ x \neq 2t, \text{ Так как } t = x^2 - 2, \text{ то} \\ x \neq -t. \end{cases} \begin{cases} \begin{cases} x = 0, \\ x = x^2 - 2; \end{cases} \\ x \neq 2(x^2 - 2), \\ x \neq -x^2 + 2; \end{cases} \begin{cases} \begin{cases} x = 0, \\ x = 2, \\ x = -1; \end{cases} \\ x \neq 2(x^2 - 2), \\ x \neq -x^2 + 2; \end{cases} \begin{cases} x = 0, \\ x = 2, \\ x = -1. \end{cases}$$

Тогда $n \cdot S = 3 \cdot (-1 + 0 + 2) = 3$.

Ответ: 3.

В6. Так как сфера вписана в пирамиду, то радиус сферы можно найти по формуле $r = \frac{3V}{S_{\text{полн}}}$.

Из прямоугольного треугольника ABP найдем $PB = AB = 2 + \sqrt{2}$ и $PA = (2 + \sqrt{2}) \cdot \sqrt{2}$.

$$S_{BPC} = S_{ABP} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot PB = \frac{1}{2} \cdot (2 + \sqrt{2})^2,$$

$$\text{а } S_{DPC} = S_{ADP} = \frac{1}{2} \cdot AD \cdot PA = \frac{1}{2} \cdot (2 + \sqrt{2}) \cdot (2 + \sqrt{2}) \cdot \sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot (2 + \sqrt{2})^2$$

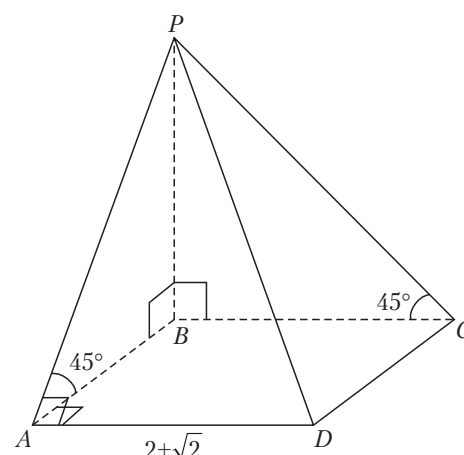
$$\text{и } S_{ABCD} = (2 + \sqrt{2})^2.$$

Тогда

$$S_{\text{полн}} = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot (2 + \sqrt{2})^2 + 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot (2 + \sqrt{2})^2 + (2 + \sqrt{2})^2 = 2 \cdot (2 + \sqrt{2})^2 + \sqrt{2} \cdot (2 + \sqrt{2})^2 = (2 + \sqrt{2})^3.$$

$$V = \frac{1}{3} S_{ABCD} \cdot PB = \frac{1}{3} \cdot (2 + \sqrt{2})^2 \cdot (2 + \sqrt{2}) = \frac{1}{3} \cdot (2 + \sqrt{2})^3.$$

$$\text{Тогда } r = \frac{3V}{S_{\text{полн}}} = \frac{3 \cdot \frac{1}{3} \cdot (2 + \sqrt{2})^3}{(2 + \sqrt{2})^3} = 1.$$



Ответ: 1.

ТЕСТ 33

Часть А

$$\text{A1. } \frac{b}{\sqrt[4]{-b}} = \frac{-(-b)}{\sqrt[4]{-b}} = \frac{-(\sqrt[4]{-b})^4}{\sqrt[4]{-b}} = -\sqrt[4]{-b^3}.$$

Ответ: 3.

A2. Если некоторое число увеличить на 200 %, то оно увеличится в три раза, т. е. $3^{19} \cdot 3 = 3^{20}$.

Ответ: 3.

A3. Чтобы найти абсциссы точек пересечения графиков функций $y = -2$ и $y = \sqrt[3]{1-36x^2}$, решим уравнение: $\sqrt[3]{1-36x^2} = -2$; $1-36x^2 = -8$; $-36x^2 = -9$; $x^2 = \frac{1}{4}$; $x = \pm \frac{1}{2}$.

Ответ: 5.

A4. $(5x-2) \cdot \log_{0,7} 3 - \log_{0,7} 27 > 0$; $(5x-2) \cdot \log_{0,7} 3 - \log_{0,7} 3^3 > 0$; $(5x-2) \cdot \log_{0,7} 3 - 3 \log_{0,7} 3 > 0$; $\log_{0,7} 3 \cdot (5x-2-3) > 0$; $\log_{0,7} 3 \cdot (5x-5) > 0$.

Так как $\log_{0,7} 3 < 0$, то полученное неравенство равносильно неравенству $5x-5 < 0$; $x < 1$; $x \in (-\infty; 1)$.

Ответ: 4.

$$\text{A5. } \frac{\sqrt[3]{a^5 \cdot b^{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt[4]{a^{-1}}}}{(a^2 \cdot \sqrt[4]{ab^3})^{\frac{1}{3}}} = \frac{\sqrt[3]{a^5 \cdot b^{\frac{1}{2}} \cdot a^{-\frac{1}{4}}}}{(a^2 \cdot a^{\frac{1}{4}} \cdot b^{\frac{3}{4}})^{\frac{1}{3}}} = \frac{\sqrt[3]{b^{\frac{1}{2}} \cdot a^{\frac{19}{4}}}}{(a^{\frac{9}{4}} \cdot b^{\frac{3}{4}})^{\frac{1}{3}}} = \frac{b^{\frac{1}{6}} \cdot a^{\frac{19}{12}}}{a^{\frac{9}{12}} \cdot b^{\frac{3}{12}}} = a^{\frac{10}{12}} \cdot b^{-\frac{1}{12}} = a^{\frac{5}{6}} \cdot b^{-\frac{1}{12}}.$$

Ответ: 3.

A6. На рисунке изображен график функции $y = x^{-2}$.

Ответ: 2.

A7. Так как боковая поверхность пирамиды равна 54, то площадь грани PBC равна $54 : 3 = 18$.

Пусть точка A — вершина пирамиды, тогда треугольник PBC — ее основание, а отрезок AO — ее высота.

Тогда объем пирамиды равен $V = \frac{1}{3} S_{PBC} \cdot AO$; $V = \frac{1}{3} \cdot 18 \cdot 6 = 36$.

Ответ: 4.

$$\text{A8. } \begin{cases} 2^x \cdot 3^y = 24, \\ 2^y \cdot 3^x = 54; \end{cases} \begin{cases} 2^x \cdot 3^x \cdot 3^y \cdot 2^y = 24 \cdot 54, \\ 2^y \cdot 3^x = 54; \end{cases} \begin{cases} 6^x \cdot 6^y = 6^4, \\ 2^y \cdot 3^x = 54; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 6^{x+y} = 6^4, \\ 2^y \cdot 3^x = 54; \end{cases} \begin{cases} x+y=4, \\ 2^y \cdot 3^x = 54; \end{cases} \begin{cases} y=4-x, \\ 2^{4-x} \cdot 3^x = 54; \end{cases} \begin{cases} y=4-x, \\ \frac{2^4}{2^x} \cdot 3^x = 54; \end{cases}$$

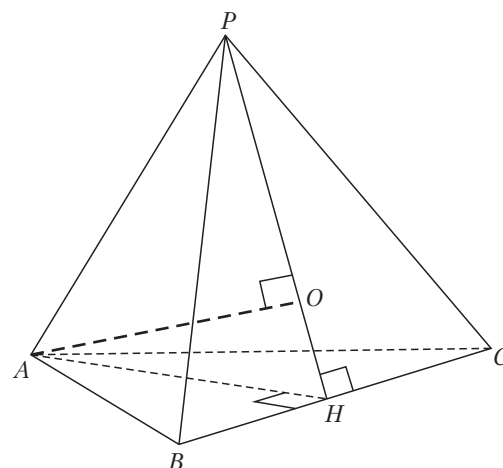
$$\begin{cases} y=4-x, \\ \frac{3^x}{2^x} = \frac{27}{8}; \end{cases} \begin{cases} y=4-x, \\ \left(\frac{3}{2}\right)^x = \left(\frac{3}{2}\right)^3; \end{cases} \begin{cases} y=1, \\ x=3. \end{cases}$$

Тогда $x_0 + y_0 = 3 + 1 = 4$.

Ответ: 4.

A9. Пусть a , b и c — измерения прямоугольного параллелепипеда. Тогда $ab = 12,5$; $bc = 2$; $ac = 4$. Перемножим полученные равенства и получим $a^2 b^2 c^2 = 100$; $abc = 10$. То есть $V = 10$.

Ответ: 2.



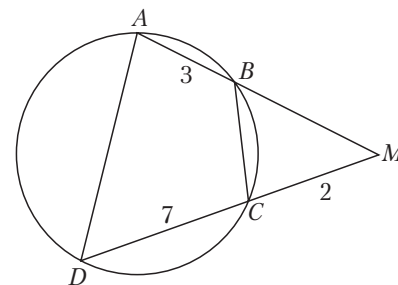
$$\text{В1. } \left(\frac{x-2}{x+1} \right)^2 = \frac{x^2-6x+8}{x^2-x-2}; \quad \frac{(x-2)^2}{(x+1)^2} = \frac{(x-4)(x-2)}{(x+1)(x-2)}; \quad \begin{cases} \frac{(x-2)^2}{(x+1)^2} = \frac{x-4}{x+1}, \\ x \neq 2; \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{(x-2)^2 - (x-4)(x+1)}{(x+1)^2} = 0, \\ x \neq 2; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{-x+8}{(x+1)^2} = 0, \\ x \neq 2; \end{cases} \quad x = 8.$$

Ответ: 8.

В2. По теореме об отрезках пересекающихся хорд $BM \cdot AM = CM \cdot MD$;
 $x \cdot (x+3) = 2 \cdot 9$; $x^2 + 3x - 18 = 0$; $\begin{cases} x = -6, \\ x = 3. \end{cases}$ По смыслу задачи $BM = 3$.

Ответ: 3.



$$\text{В3. } \log_{\frac{1}{3}}(2x-5,5) \geq \log_{4-x} 1; \quad \begin{cases} \log_{\frac{1}{3}}(2x-5,5) \geq 0, \\ 4-x > 0, \\ 4-x \neq 1; \end{cases} \quad \begin{cases} 0 < 2x-5,5 \leq 1, \\ x < 4, \\ x \neq 3; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5,5 < 2x \leq 6,5, \\ x < 4, \\ x \neq 3; \end{cases} \quad \begin{cases} 2,75 < x \leq 3,25, \\ x < 4, \\ x \neq 3; \end{cases} \quad x \in (2,75; 3) \cup (3; 3,25]. \text{ Значение выражения } 4 \cdot M \text{ равно } 13.$$

Ответ: 13.

В4. 1) Если $\cos x \geq 0$, то уравнение принимает вид $1 + \sin x = \cos x$; $\cos x - \sin x = 1$; $\frac{\sqrt{2}}{2} \cos x - \frac{\sqrt{2}}{2} \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$;

$$\cos \frac{\pi}{4} \cos x - \sin \frac{\pi}{4} \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}; \quad \cos \left(x + \frac{\pi}{4} \right) = \frac{\sqrt{2}}{2}; \quad x + \frac{\pi}{4} = \pm \frac{\pi}{4} + 2\pi n, \quad n \in \mathbf{Z}; \quad \begin{cases} x = 2\pi n, \\ x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, \quad n \in \mathbf{Z}. \end{cases}$$

Полученные серии корней удовлетворяют условию $\cos x \geq 0$.

2) Если $\cos x < 0$, то уравнение принимает вид $1 + \sin x = -\cos x$; $\cos x + \sin x = -1$; $\frac{\sqrt{2}}{2} \cos x + \frac{\sqrt{2}}{2} \sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$;

$$\cos \frac{\pi}{4} \cos x + \sin \frac{\pi}{4} \sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}; \quad \cos \left(x - \frac{\pi}{4} \right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}; \quad x - \frac{\pi}{4} = \pm \frac{3\pi}{4} + 2\pi n, \quad n \in \mathbf{Z}; \quad \begin{cases} x = \pi + 2\pi n, \\ x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, \quad n \in \mathbf{Z}. \end{cases}$$

Условию $\cos x < 0$ удовлетворяют корни $x = \pi + 2\pi n, \quad n \in \mathbf{Z}$.

Объединяя полученные корни, получим $\begin{cases} x = \pi n, \\ x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, \quad n \in \mathbf{Z}. \end{cases}$

Наибольший отрицательный корень уравнения -90° , наименьший положительный корень уравнения 180° , их сумма равна 90° .

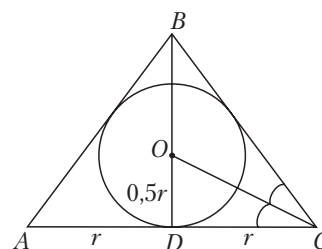
Ответ: 90.

В5. Рассмотрим осевое сечение конуса — треугольник ABC . Окружность, радиус которой равен радиусу шара, вписанного в конус, вписана в треугольник ABC . Тогда CO — биссектриса угла BAC , значит,

$$\frac{BC}{BO} = \frac{DC}{DO}; \quad \frac{BC}{BO} = \frac{r}{0,5r}; \quad \frac{BC}{BO} = 2; \quad BC = 2BO.$$

Пусть $BO = x$, тогда $BC = 2x$.

Поскольку периметр треугольника ABC равен 64, то $4x + 2r = 64$; $r = 32 - 2x$.



По теореме Пифагора из прямоугольного треугольника BDC получим:

$$BC^2 = DC^2 + DB^2; \quad 4x^2 = r^2 + (x + 0,5r)^2; \quad 4x^2 = (32 - 2x)^2 + 16^2; \quad x = 10.$$

Тогда $BC = 20$, $r = 12$ и $S_{\text{полн}} = \pi r(l + r)$; $S_{\text{полн}} = 384\pi$.

Значение искомого выражения равно 384.

Ответ: 384.

В6. Пусть x и y — суммы членов прогрессии, стоящих до b_n и стоящих после b_n соответственно. Тогда

$$\begin{cases} x + \frac{1}{6} + y = 0,75, \\ \frac{x}{y} = 6; \end{cases} \quad \begin{cases} 7y = \frac{7}{12}, \\ x = 6y; \end{cases} \quad \begin{cases} y = \frac{1}{12}, \\ x = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Пусть q — знаменатель прогрессии.

Найдем сумму прогрессии, начиная с b_n ее члена: $S = b_n + y = \frac{1}{6} + \frac{1}{12} = \frac{1}{4}$.

Тогда по формуле $S = \frac{b_1}{1-q}$ получим: $\frac{1}{4} = \frac{\frac{1}{6}}{1-q}$; $q = \frac{1}{3}$.

Тогда $b_{n-1} = \frac{b_n}{q} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{3}} = \frac{1}{2}$, т. е. $b_{n-1} = x$, значит, $n = 2$.

Ответ: 2.

ТЕСТ 34

Часть А

A1. Центр окружности, вписанной в треугольник, совпадает с точкой пересечения биссектрис треугольника.
Ответ: 3.

A2. $\sqrt[5]{128 \cdot 81 \cdot 24} = \sqrt[5]{32 \cdot 4 \cdot 81 \cdot 3 \cdot 8} = \sqrt[5]{2^5 \cdot 2^5 \cdot 3^5} = 2 \cdot 2 \cdot 3 = 12.$

Ответ: 5.

A3. $5m^4 - (8m(m-3) + (m^2-2) \cdot 5m^2) = 5m^4 - (8m^2 - 24m + 5m^4 - 10m^2) = 5m^4 - (5m^4 - 2m^2 - 24m) =$
 $= 5m^4 - 5m^4 + 2m^2 + 24m = 2m^2 + 24m \Big|_{m=-0,5} = 2 \cdot (-0,5)^2 + 24 \cdot (-0,5) = 0,5 - 12 = -11,5.$

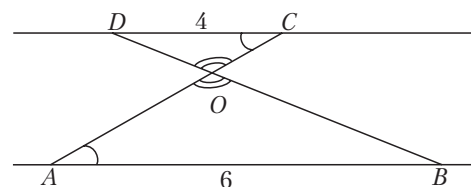
Ответ: 1.

A4. Треугольники AOB и COD подобны по двум углам, тогда

$$\frac{AO}{OC} = \frac{AB}{DC}; \quad \frac{AO}{OC} = \frac{6}{4}; \quad \frac{AO}{OC} = \frac{3}{2}.$$

То есть $AO = 3x$, $OC = 2x$, тогда

$$AC = AO + OC = 5x \text{ и } AO : AC = \frac{3x}{5x} = 0,6.$$



Ответ: 2.

A5. Для любого $x_0 > 0$ получим $\left(\frac{1}{3}\right)^{x_0} < 0,5^{x_0} < 2^{x_0} < 3^{x_0} < 4^{x_0}$, т. е. точка A имеет координаты $(x_0; 3^{x_0})$.

Ответ: 4.

A6. $\cos^2 \frac{x}{3} - 7 \cos \frac{x}{3} + 4 = \sin^2 \frac{x}{3}; \quad \cos^2 \frac{x}{3} - 7 \cos \frac{x}{3} + 4 = 1 - \cos^2 \frac{x}{3}; \quad 2 \cos^2 \frac{x}{3} - 7 \cos \frac{x}{3} + 3 = 0;$

$$\begin{cases} \cos \frac{x}{3} = 3 \notin [-1; 1], \\ \cos \frac{x}{3} = \frac{1}{2}; \end{cases}$$

$$\cos \frac{x}{3} = \frac{1}{2}; \quad \frac{x}{3} = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n; \quad x = \pm \pi + 6\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: 1.

A7. $\log_4 24 - \log_4 9 \cdot \log_9 13 \cdot \log_{13} 6 + 3^{\log_5 7} - 7^{\log_5 3} = \log_4 24 - \log_4 9 \cdot \frac{\log_4 13}{\log_4 9} \cdot \frac{\log_4 6}{\log_4 13} + 3^{\log_5 7} - 3^{\log_5 7} =$
 $= \log_4 24 - \log_4 6 = \log_4 4 = 1.$

Ответ: 3.

A8. $x^2 + (\sqrt{x-2})^2 - 10 = 0; \quad \begin{cases} x^2 + x - 2 - 10 = 0, \\ x - 2 \geq 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 + x - 12 = 0, \\ x \geq 2; \end{cases} \quad \begin{cases} x = -4, \\ x = 3; \\ x \geq 2; \end{cases} \quad x = 3.$

Ответ: 4.

A9. Диагональными сечениями прямой призмы являются прямоугольники AA_1C_1C и BB_1D_1D , площади которых равны 16 и 12.

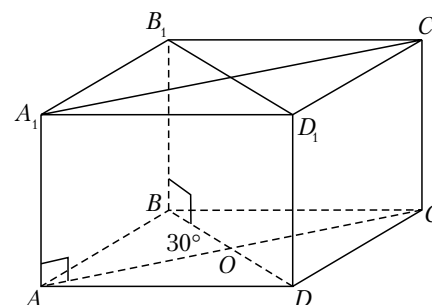
Тогда $AC = 16 : 4 = 4$ и $BD = 12 : 4 = 3$.

Площадь параллелограмма BB_1D_1D найдем по формуле

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2} AC \cdot BD \cdot \sin \angle AOB; \quad S_{ABCD} = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 3 \cdot \frac{1}{2} = 3.$$

Тогда $V_{ABCD A_1 B_1 C_1 D_1} = S_{ABCD} \cdot AA_1 = 3 \cdot 4 = 12.$

Ответ: 2.



$$\begin{aligned} \text{В1. } 5\sqrt{2} \sin\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{7}\right)\right) &= 5\sqrt{2} \sin\left(\frac{\pi}{2} + \operatorname{arctg}\frac{1}{7}\right) = 5\sqrt{2} \cos\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{7}\right) = \frac{5\sqrt{2}}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{7}\right)}} = \\ &= \frac{5\sqrt{2}}{\sqrt{1+\left(\frac{1}{7}\right)^2}} = \frac{5\sqrt{2}}{\sqrt{1+\frac{1}{49}}} = \frac{5\sqrt{2}}{\sqrt{\frac{50}{49}}} = 7. \end{aligned}$$

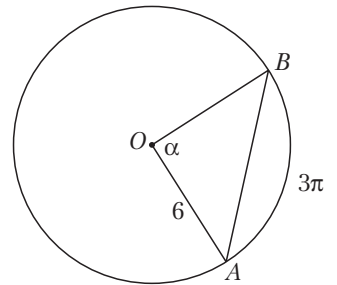
Ответ: 7.

$$\begin{aligned} \text{В2. } |x^2 - 13x + 36| &\geq |36 - x^2|; |x^2 - 13x + 36| \geq |x^2 - 36|; (x^2 - 13x + 36)^2 - (x^2 - 36)^2 \geq 0; \\ (x^2 - 13x + 36 - x^2 + 36)(x^2 - 13x + 36 + x^2 - 36) &\geq 0; (-13x + 72)(2x^2 - 13x) \geq 0; (13x - 72)x(2x - 13) \leq 0; \\ \begin{array}{c} - \quad + \quad - \quad + \\ \bullet \quad \bullet \quad \bullet \\ 0 \quad \frac{72}{13} \quad 6,5 \end{array} \quad x \in (-\infty; 0] \cup \left[\frac{72}{13}; \frac{13}{2}\right]. \end{aligned}$$

Произведение наименьшего и наибольшего положительных решений неравенства равно $\frac{72}{13} \cdot \frac{13}{2} = 36$.

Ответ: 36.

В3. По формуле длины дуги $l = \frac{\pi R}{180^\circ} \cdot \alpha$ найдем градусную меру центрального угла AOB : $\alpha = \frac{3\pi \cdot 180^\circ}{6\pi} = 90^\circ$. То есть отрезок AB является стороной квадрата, вписанного в данную окружность. Из треугольника OAB по теореме Пифагора найдем $AB = 6\sqrt{2}$. Тогда площадь квадрата равна: $S = (6\sqrt{2})^2 = 72$.



Ответ: 72.

В4. Заметим, что $(\sqrt{7+4\sqrt{3}}) \cdot (\sqrt{7-4\sqrt{3}}) = \sqrt{(7+4\sqrt{3})(7-4\sqrt{3})} = \sqrt{49-48} = 1$, тогда $\sqrt{7-4\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{7+4\sqrt{3}}} = (\sqrt{7+4\sqrt{3}})^{-1}$ и уравнение принимает вид $(\sqrt{7+4\sqrt{3}})^{\frac{1}{\cos x}} + (\sqrt{7+4\sqrt{3}})^{-\frac{1}{\cos x}} = 14$.

Пусть $(\sqrt{7+4\sqrt{3}})^{\frac{1}{\cos x}} = t$, тогда $t + t^{-1} = 14$; $t^2 - 14t + 1 = 0$; $t_{1,2} = 7 \pm 4\sqrt{3}$. Значит,

$$\begin{cases} (\sqrt{7+4\sqrt{3}})^{\frac{1}{\cos x}} = 7-4\sqrt{3}, & \left[(7+4\sqrt{3})^{\frac{1}{2\cos x}} = (7+4\sqrt{3})^{-1}, \right. \\ (\sqrt{7+4\sqrt{3}})^{\frac{1}{\cos x}} = 7+4\sqrt{3}; & \left. \left[(7+4\sqrt{3})^{\frac{1}{2\cos x}} = (7+4\sqrt{3})^1; \right. \right. \\ & \left. \left[\frac{1}{2\cos x} = -1, \right. \right. \\ & \left. \left[\frac{1}{2\cos x} = 1; \right. \right. \end{cases} \quad \begin{cases} \cos x = -\frac{1}{2}, \\ \cos x = \frac{1}{2}; \end{cases} \quad \begin{cases} x = \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi n, \\ x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n, \end{cases} \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Наибольший отрицательный корень уравнения равен -60° .

Ответ: -60 .

В5. Пусть $PO = AO = R$, тогда из прямоугольных треугольников AKO и AOM по теореме Пифагора получим, что $AK = \sqrt{R^2 - 3}$ и $AM = \sqrt{R^2 - 5}$.

Так как отрезок OK является серединным перпендикуляром к отрезку AP , то $AP = 2\sqrt{R^2 - 3}$.

Из треугольников AMH и MHO найдем

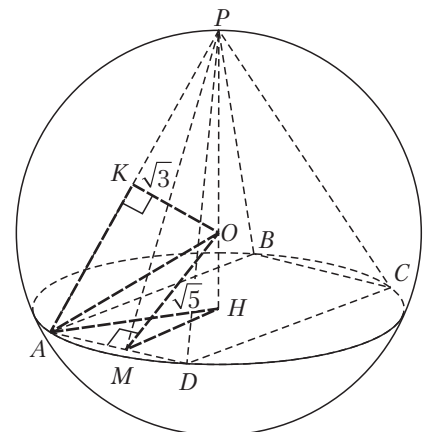
$$MH = \sqrt{R^2 - 5} \text{ и } OH = \sqrt{10 - R^2}.$$

В треугольнике AMP $MP = \sqrt{R^2 - 5}$.

Из треугольника MHP по теореме Пифагора получим:

$$R^2 - 1 = R^2 - 5 + (R + \sqrt{10 - R^2})^2; \sqrt{10 - R^2} = 2 - R; R^2 - 2R - 3 = 0; R = 3.$$

Ответ: 3.



В6. Заметим, что уравнение имеет корни, если $1 - x^2 \geq 0$, т. е. $x \in [-1; 1]$.

Пусть $x = \sin \alpha$ и $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ (на данном промежутке функция синус принимает все свои значения).

Тогда исходное уравнение принимает вид

$$\sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = 4 \sin^3 \alpha - 3 \sin \alpha; \quad \sqrt{\cos^2 \alpha} = 4 \sin^3 \alpha - 3 \sin \alpha; \quad |\cos \alpha| = 4 \sin^3 \alpha - 3 \sin \alpha.$$

При $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ получим $|\cos \alpha| = \cos \alpha$, тогда $\cos \alpha = 4 \sin^3 \alpha - 3 \sin \alpha$.

$$\cos \alpha = \sin \alpha (4 \sin^2 \alpha - 3); \quad \cos \alpha = \sin \alpha (4(1 - \cos^2 \alpha) - 3); \quad \cos \alpha = \sin \alpha (1 - 4 \cos^2 \alpha);$$

$$\cos \alpha = \sin \alpha - 4 \cos^2 \alpha \sin \alpha; \quad \cos \alpha + 4 \cos^2 \alpha \sin \alpha = \sin \alpha; \quad \cos \alpha (1 + 4 \cos \alpha \sin \alpha) = \sin \alpha;$$

$$\cos \alpha (1 + 2 \sin 2\alpha) = \sin \alpha; \quad \cos \alpha + 2 \sin 2\alpha \cos \alpha = \sin \alpha; \quad \cos \alpha + 2 \cdot \frac{1}{2} (\sin 3\alpha + \sin \alpha) = \sin \alpha; \quad \cos \alpha + \sin 3\alpha = 0;$$

$$\sin \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) + \sin 3\alpha = 0; \quad 2 \sin \left(\frac{\pi}{4} + \alpha \right) \cos \left(\frac{\pi}{4} - 2\alpha \right) = 0; \quad \begin{cases} \sin \left(\frac{\pi}{4} + \alpha \right) = 0, \\ \cos \left(\frac{\pi}{4} - 2\alpha \right) = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{\pi}{4} + \alpha = \pi n, \\ 2\alpha - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbf{Z}. \end{cases}$$

$$\text{Так как } \alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right], \text{ то } \begin{cases} \alpha_1 = -\frac{\pi}{4}, \\ \alpha_2 = -\frac{\pi}{8}, \\ \alpha_3 = \frac{3\pi}{8}. \end{cases} \quad \text{Тогда } \begin{cases} x_1 = \sin \left(-\frac{\pi}{4} \right), \\ x_2 = \sin \left(-\frac{\pi}{8} \right), \\ x_3 = \sin \frac{3\pi}{8}. \end{cases}$$

Найдем произведение корней данного уравнения:

$$\begin{aligned} & \sin \left(-\frac{\pi}{4} \right) \cdot \sin \left(-\frac{\pi}{8} \right) \cdot \sin \frac{3\pi}{8} = \\ & = \sin \frac{\pi}{4} \cdot \sin \frac{\pi}{8} \cdot \sin \frac{3\pi}{8} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \sin \frac{\pi}{8} \cdot \cos \frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Значение искомого выражения равно 2.

Ответ: 2.

ТЕСТ 35

Часть А

A1. Верным является высказывание «наименьшим простым числом третьего десятка является число 23».

Ответ: 5.

A2. Парабола является графиком квадратичной функции вида $y = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$. Из предложенных функций квадратичной является функция $y = 7 - x^2$.

Ответ: 3.

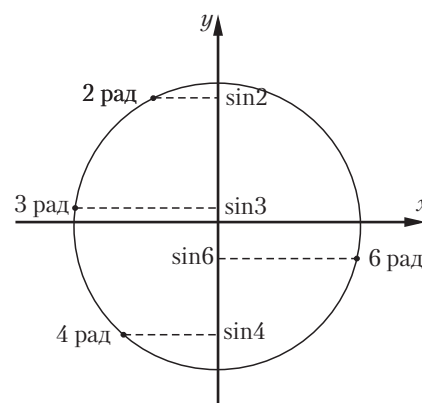
A3. Пусть R — радиус шара. Так как объем шара численно равен его поверхности, то

$$\frac{4}{3}\pi R^3 = 4\pi R^2; \quad \frac{R}{3} = 1; \quad R = 3.$$

Ответ: 3.

A4. Отметим данные числа на тригонометрической окружности и получим, что $\sin 4 < \sin 6 < \sin 3 < \sin 2 < 1$.

Ответ: 4.

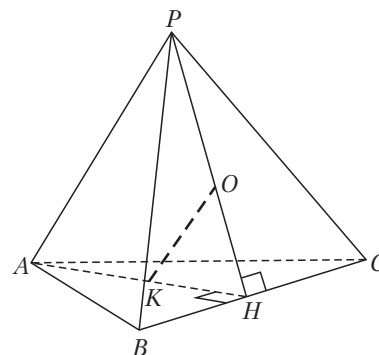


A5. Так как тетраэдр является правильным, то $KH = \frac{1}{3}AH$ и $OH = \frac{1}{3}PH$.

Воспользуемся подобием треугольников APH и OKH и получим, что

$$OH = \frac{1}{3}AP = \frac{1}{3} \cdot 1 = \frac{1}{3}.$$

Ответ: 3.



$$\text{A6. } \frac{\cos 2x}{1 - \sqrt{2} \sin x} = 0; \quad \begin{cases} \cos 2x = 0, \\ \sin x \neq \frac{\sqrt{2}}{2}; \end{cases} \quad \begin{cases} 2x = \frac{\pi}{2} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}, \\ x \neq (-1)^n \frac{\pi}{4} + \pi n; \end{cases} \quad \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}, \quad k \in \mathbb{Z}, \\ x \neq (-1)^n \frac{\pi}{4} + \pi n; \end{cases} \quad \begin{cases} x = -\frac{\pi}{4} + 2\pi k, \\ x = -\frac{3\pi}{4} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Наименьший положительный корень уравнения равен 225° .

Ответ: 2.

$$\begin{aligned} \text{A7. } & \frac{a}{b^2 + ab} - \frac{1}{b^2} \cdot \frac{a+b}{ab} \cdot \left(\frac{4ab}{a^2 + b^2 + 2ab} : \left(\frac{a+b}{a-b} - \frac{a-b}{a+b} \right) \right) = \frac{a}{b^2 + ab} - \frac{1}{b^2} \cdot \frac{ab}{a+b} \cdot \left(\frac{4ab}{(a+b)^2} : \frac{(a+b)^2 - (a-b)^2}{(a-b)(a+b)} \right) = \\ & = \frac{a}{b^2 + ab} - \frac{1}{b^2} \cdot \frac{ab}{a+b} \cdot \frac{4ab}{(a+b)^2} : \frac{4ab}{(a-b)(a+b)} = \frac{a}{b^2 + ab} - \frac{1}{b^2} \cdot \frac{ab}{a+b} \cdot \frac{4ab}{(a+b)^2} \cdot \frac{(a-b)(a+b)}{4ab} = \\ & = \frac{a}{b^2 + ab} - \frac{a(a-b)}{b(a+b)^2} = \frac{a}{b(a+b)} - \frac{a(a-b)}{b(a+b)^2} = \frac{a(a+b) - a(a-b)}{b(a+b)^2} = \frac{2ab}{b(a+b)^2} = \frac{2a}{(a+b)^2}. \end{aligned}$$

При $a=0,2$; $b=0,3$ значение выражения равно: $\frac{2 \cdot 0,2}{(0,2+0,3)^2} = \frac{0,4}{0,25} = 1,6$.

Ответ: 1.

A8. $1 + \log_{0,25}(\log_3(4-x)) > 0$; $\log_{0,25}(\log_3(4-x)) > -1$; $-\log_4(\log_3(4-x)) > -1$; $\log_4(\log_3(4-x)) < 1$;

$$\begin{cases} \log_3(4-x) < 4, \\ \log_3(4-x) > 0; \end{cases} \begin{cases} 4-x < 81, \\ 4-x > 0; \\ 4-x > 1; \end{cases} \begin{cases} 4-x < 81, \\ 4-x > 1; \end{cases} \begin{cases} x > -77, \\ x < 3; \end{cases} \quad x \in (-77; 3).$$

Неравенство имеет 79 целых решений.

Ответ: 3.

$$\begin{aligned} \text{A9. } 2^x \cdot 3^{2-x} - \frac{8^{\frac{x+1}{3}}}{9^{\frac{x-2}{2}}} + \frac{(\sqrt{2})^{2x+4}}{(\sqrt{3})^{2x-2}} &= 2^x \cdot 3^{2-x} - \frac{(2^3)^{\frac{x+1}{3}}}{(3^2)^{\frac{x-2}{2}}} + \frac{\left(\frac{1}{2^2}\right)^{2x+4}}{\left(\frac{1}{3^2}\right)^{2x-2}} = \frac{9 \cdot 2^x}{3^x} - \frac{2^{x+1}}{3^{x-2}} + \frac{2^{x+2}}{3^{x-1}} = \frac{9 \cdot 2^x}{3^x} - \frac{2 \cdot 9 \cdot 2^x}{3^x} + \frac{4 \cdot 3 \cdot 2^x}{3^x} = \\ &= \frac{2^x}{3^x} \cdot (9 - 18 + 12) = \frac{2^x}{3^x} \cdot 3 = 2^x \cdot 3^{1-x}. \end{aligned}$$

Ответ: 1.

Часть B

$$\begin{aligned} \text{B1. } \log_2\left(1 - \sin \frac{2\pi}{3}\right)^{-1} - \left| \log_{0,5}\left(1 + \sin \frac{2\pi}{3}\right) \right| &= \log_2\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{-1} - \left| \log_{0,5}\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \right| = \log_2\left(\frac{2 - \sqrt{3}}{2}\right)^{-1} - \left| \log_{0,5}\left(\frac{2 + \sqrt{3}}{2}\right) \right| = \\ &= \log_2\left(\frac{2}{2 - \sqrt{3}}\right) - \left| \log_2\left(\frac{2 + \sqrt{3}}{2}\right) \right| = \log_2 2 - \log_2(2 - \sqrt{3}) - \left| \log_2(2 + \sqrt{3}) - \log_2 2 \right| = 1 - \log_2(2 - \sqrt{3}) - \log_2(2 + \sqrt{3}) + 1 = \\ &= 2 - \log_2(2 - \sqrt{3}) - \log_2(2 + \sqrt{3})^{-1} = 2 - \log_2(2 - \sqrt{3}) + \log_2(2 - \sqrt{3}) = 2. \end{aligned}$$

Ответ: 2.

$$\text{B2. } x \cdot \sqrt{3x^2 + 13} - \sqrt{x} \cdot \sqrt[4]{3x^2 + 13} = 2.$$

Пусть $t = \sqrt{x} \cdot \sqrt[4]{3x^2 + 13}$, тогда $t^2 - t - 2 = 0$; $\begin{cases} t = 2, \\ t = -1. \end{cases}$ Так как $t \geq 0$, то $t = 2$, значит,

$$\sqrt{x} \cdot \sqrt[4]{3x^2 + 13} = 2; \begin{cases} x^2(3x^2 + 13) = 16, \\ x \geq 0; \end{cases} \begin{cases} 3x^4 + 13x^2 - 16 = 0, \\ x \geq 0; \end{cases} \begin{cases} x^2 = -\frac{16}{3}, \\ x^2 = 1; \\ x \geq 0; \end{cases} \begin{cases} x^2 = 1, \\ x \geq 0; \end{cases} \begin{cases} x = \pm 1, \\ x \geq 0; \end{cases} \quad x = 1.$$

Ответ: 1.

B3. Гипотенуза AB прямоугольного треугольника ABC является диаметром описанной около этого треугольника окружности.

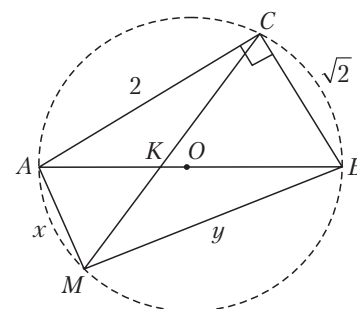
Так как угол AMB опирается на диаметр AB , то треугольник ABM — прямоугольный. По теореме Пифагора $AB^2 = AC^2 + BC^2$; $AB^2 = 6$.

Пусть $AM = x$, $MB = y$, тогда $x^2 + y^2 = 6$.

Рассмотрим треугольники AMK и BKC . Поскольку $\angle AKM = \angle CKB$ (как вертикальные), а $\angle BAM = \angle MCB$ (как вписанные, опирающиеся на одну дугу), то треугольники AMK и BKC подобны.

Тогда $\frac{AM}{BC} = \frac{AK}{CK}$. Из подобия треугольников BMK и AKC получим, что

$$\frac{BM}{AC} = \frac{BK}{CK}.$$



Из полученных равенств имеем, что $CK = \frac{BC \cdot AK}{AM}$ и $CK = \frac{BK \cdot AC}{BM}$, т. е. $\frac{BC \cdot AK}{AM} = \frac{BK \cdot AC}{BM}$;
 $\frac{BC \cdot BM}{AM \cdot AC} = \frac{BK}{AK}$; $\frac{\sqrt{2} \cdot y}{x \cdot 2} = \frac{BK}{AK}$. Так как по условию задачи $BK : AK = 3 : 1$, то $y = 3\sqrt{2}x$.

Рассмотрим систему уравнений $\begin{cases} x^2 + y^2 = 6, \\ y = 3\sqrt{2}x; \end{cases} \begin{cases} x^2 = \frac{6}{19}, \\ y = 3\sqrt{2}x. \end{cases} S_{ABM} = \frac{1}{2}xy = \frac{1}{2} \cdot 3\sqrt{2} \cdot x^2 = \frac{1}{2} \cdot 3\sqrt{2} \cdot \frac{6}{19} = \frac{9\sqrt{2}}{19}$.

Тогда $19\sqrt{2}S = 19\sqrt{2} \cdot \frac{9\sqrt{2}}{19} = 38$.

Ответ: 38.

B4. $|x^2 - 6x + 8| - 3 \geq x - 1$; $\begin{cases} |x^2 - 6x + 8| - 3 \geq x - 1, \\ |x^2 - 6x + 8| - 3 \leq -x + 1; \end{cases} \begin{cases} |x^2 - 6x + 8| \geq x + 2, \\ |x^2 - 6x + 8| \leq -x + 4; \end{cases} x \in (-\infty; 3] \cup \{4\} \cup [6; +\infty).$

$$\begin{cases} x^2 - 6x + 8 \geq x + 2, \\ x^2 - 6x + 8 \leq -x - 2; \end{cases} \begin{cases} x^2 - 7x + 6 \geq 0, \\ x^2 - 5x + 10 \leq 0; \end{cases} \begin{cases} x \in (-\infty; 1] \cup [6; +\infty), \\ x \in \emptyset; \end{cases} \begin{cases} x \in (-\infty; 1] \cup [6; +\infty), \\ x \in [1; 3] \cup \{4\}. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 - 6x + 8 \leq -x + 4, \\ x^2 - 6x + 8 \geq x - 4; \end{cases} \begin{cases} x^2 - 5x + 4 \leq 0, \\ x^2 - 7x + 12 \geq 0; \end{cases} \begin{cases} x \in [1; 4], \\ x \in (-\infty; 3] \cup [4; +\infty); \end{cases}$$

Найдем сумму целых решений неравенства, принадлежащих промежутку $(1; 7]$: $2 + 3 + 4 + 6 + 7 = 22$.

Ответ: 22.

B5. Равнобедренная трапеция $ABCD$ — осевое сечение конуса. Тогда круг радиуса, равного радиусу шара, вписан в трапецию $ABCD$.

Пусть $BC = 2r_1$, $AD = 2r_2$, $AB = CD = l$.

$S_{\text{бок}} = \pi(r_1 + r_2)l$, т. е. $(r_1 + r_2)l = 400$.

Поскольку трапеция описана около круга, то $BC + AD = AB + CD$, т. е.

$2r_1 + 2r_2 = 2l$; $r_1 + r_2 = l$. Тогда $l^2 = 400$; $l = 20$.

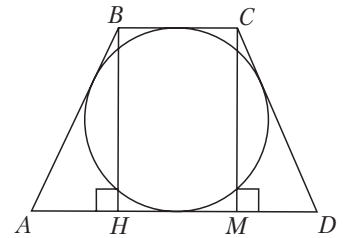
В прямоугольном треугольнике ABH известно, что $AB = 20$; $BH = 2R = 12$ (где R — радиус шара, вписанного в конус), тогда по теореме Пифагора $AH = 16$.

Так как $2r_1 + 2r_2 = 2l$, то $2r_1 + 2r_2 = 40$; $2r_1 + 16 + 2r_2 + 16 = 40$; $r_1 = 2$. Тогда $r_2 = 18$.

$V = \frac{1}{3}\pi h(r_1^2 + r_2^2 + r_1 r_2)$; $V = \frac{1}{3}\pi \cdot 12(4 + 324 + 36) = 1456\pi$.

Значение искомого выражения равно 1456.

Ответ: 1456.



B6. $\sqrt{x^2 - 7x + 10} + 9\log_4 \frac{x}{8} \geq 2x + \sqrt{14x - 20 - 2x^2} - 13$.

Выясним, при каких значениях переменной неравенство имеет смысл:

$$\begin{cases} x^2 - 7x + 10 \geq 0, \\ \frac{x}{8} > 0, \\ 14x - 20 - 2x^2 \geq 0; \end{cases} \begin{cases} x^2 - 7x + 10 \geq 0, \\ x > 0, \\ x^2 - 7x + 10 \leq 0; \end{cases} \begin{cases} x \in (-\infty; 2] \cup [5; +\infty), \\ x > 0, \\ x \in [2; 5]; \end{cases} \begin{cases} x = 2, \\ x = 5. \end{cases}$$

Проверим, являются ли найденные значения переменной решениями неравенства.

При $x = 2$ получим $\sqrt{4 - 14 + 10} + 9\log_4 \frac{2}{8} \geq 4 + \sqrt{28 - 20 - 8} - 13$; $-9 \geq -9$ — верное неравенство. При $x = 5$

получим $\sqrt{25 - 35 + 10} + 9\log_4 \frac{5}{8} \geq 10 + \sqrt{70 - 20 - 50} - 13$; $3\log_4 \frac{5}{8} \geq -1$; $\log_4 \frac{125}{512} \geq \log_4 \frac{1}{4}$; $\frac{125}{512} \geq \frac{1}{4}$ — неверное неравенство.

Таким образом, $x = 2$ является единственным решением данного неравенства.

Ответ: 1.

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

- 3000 конкурсных задач по математике / Е. Д. Куланин [и др.]. — М. : Айрис Рольф, 1997.
- Азевич, А. И. Рубежные тестовые работы по математике для 5—11 классов / А. И. Азевич. — М. : Школьная пресса, 2002.
- Алтынов, П. И. 2600 тестов и проверочных заданий по математике / П. И. Алтынов, Л. И. Звавич, А. И. Медяник. — М. : Дрофа, 2000.
- Амелькин, В. В. Геометрия на плоскости / В. В. Амелькин, В. Л. Рабцевич, В. Л. Тимохович. — М. : Асар, 2003.
- Арефьева, И. Г. Задания для подготовки к контрольным работам по математике. 5—11 классы / И. Г. Арефьева, Т. А. Адамович. — Минск : Нар. асвета, 2013.
- Арефьева, И. Г. Контрольные работы по математике: 5—11 классы / И. Г. Арефьева, Т. А. Адамович. — Минск : Нар. асвета, 2011.
- Арефьева, И. Г. Математика : пособие-репетитор / И. Г. Арефьева. — Минск : Аверсэв, 2009.
- Арефьева, И. Г. Повторяем математику за курс базовой школы / И. Г. Арефьева, И. Ю. Семина, Т. В. Ячейко. — Минск : Аверсэв, 2013.
- Арефьева, И. Г. Повторяем математику за курс средней школы / И. Г. Арефьева. — Минск : Аверсэв, 2015.
- Арефьева, И. Г. Повторяем математику за курс средней школы. Тестовые задания для 11 класса / И. Г. Арефьева. — Минск : Аверсэв, 2015.
- Галицкий, М. Л. Сборник задач по алгебре для 8—9 классов / М. Л. Галицкий, А. М. Гольдман, Л. И. Звавич. — М. : Просвещение, 1992.
- Гольдич, В. А. 3000 задач по алгебре для 5—9 классов / В. А. Гольдич, С. Е. Злотин. — СПб. : Издательский дом «Литера», 2001.
- Задачи по математике: алгебра / В. В. Вавилов, И. И. Мельников, С. Н. Алехник [и др.]. — М. : Наука, 1987.
- Звавич, Л. И. Геометрия: 8—11 классы / Л. И. Звавич, М. В. Чинкина, Л. Я. Шляпочник. — М. : Дрофа, 2001.
- Зив, Б. Г. Задачи к урокам геометрии: 7—11 классы / Б. Г. Зив. — СПб. : НПО «Мир и семья-95» ; М. : Русское слово, 1998.
- Кучмель, Т. Ф. Математика для поступающих в колледжи и техникумы / Т. Ф. Кучмель, И. Н. Соболев, В. Н. Теслюк. — Минск : Аверсэв, 2005.
- Мерзляк, А. Г. Алгебраический тренажер / А. Г. Мерзляк, В. Б. Полонский, М. С. Якир. — Киев : А. С. К., 1997.
- Райхмист, Р. Б. Задачник по математике / Р. Б. Райхмист. — М. : Московский лицей, 2004.
- Сборник задач для поступающих во ВТУЗы / под ред. М. И. Сканави. — М. : Оникс XXI век, 2005.
- Тесты по математике: 5—11 классы. — М. : Олимп ; Астрель, 1999.
- Учебно-методическая газета «Математика». — М. : Первое сентября, 2000—2004.
- Учебно-методический журнал «Математика в школе». — М. : Школа-Пресс, 2004.
- Шахмейстер, А. Х. Дроби / А. Х. Шахмейстер. — СПб., М. : ЧеРо-на-Неве, 2003.
- Шлыков, В. В. Задачи по планиметрии / В. В. Шлыков. — Минск : Асар, 1997.

СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие.....	3
Тест 1.....	4
Тест 2.....	8
Тест 3.....	11
Тест 4.....	15
Тест 5.....	19
Тест 6.....	23
Тест 7.....	26
Тест 8.....	29
Тест 9.....	32
Тест 10.....	35
Тест 11.....	38
Тест 12.....	41
Тест 13.....	45
Тест 14.....	49
Тест 15.....	52
Тест 16.....	55
Тест 17.....	58
Тест 18.....	61
Тест 19.....	64
Тест 20.....	67
Тест 21.....	71
Тест 22.....	73
Тест 23.....	76
Тест 24.....	79
Тест 25.....	83
Тест 26.....	86
Тест 27.....	89
Тест 28.....	92
Тест 29.....	95
Тест 30.....	98
Тест 31.....	102
Тест 32.....	105
Тест 33.....	108
Тест 34.....	111
Тест 35.....	114
Рекомендуемая литература.....	117